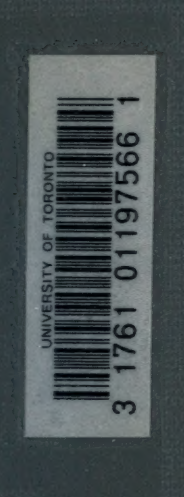




ÉTUDE

DE QUELQUES

SURFACES ALGÉBRIQUES

ENGENDRÉES PAR DES COURBES

DU SECOND ET DU TROISIÈME ORDRE

Gand, impr. C. Annoot-Braeckman, Ad. Hoste, succ[r]

ETUDE

DE QUELQUES

SURFACES ALGÉBRIQUES

ENGENDRÉES PAR DES COURBES

DU SECOND ET DU TROISIÈME ORDRE

DISSERTATION INAUGURALE

PRÉSENTÉE

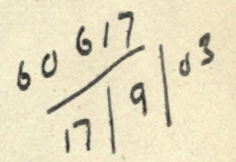
A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE GAND

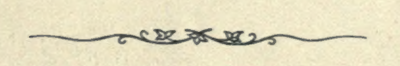
POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR SPÉCIAL

PAR

M. STUYVAERT

PROFESSEUR A L'ATHÉNÉE ROYAL DE GAND





GAND

LIBRAIRIE GÉNÉRALE DE AD. HOSTE, ÉDITEUR

Rue des Champs, 47

—

1902

La Faculté des Sciences de l'Université de Gand, dans sa séance du 10 juin 1902, a autorisé l'impression de cette dissertation.

En aucun cas, les opinions de l'auteur ne peuvent être considérées, par le fait de l'admission de son travail, comme étant celles de la Faculté ou de l'Université (arr. min. du 10 mars 1894).

LE SECRÉTAIRE
J. Wolters

LE DOYEN
[illegible signature]

TABLE DES MATIÈRES.

AVANT-PROPOS

La théorie des surfaces réglées a pour suite logique l'étude des formes engendrées par des courbes, planes ou gauches, d'ordre supérieur au premier.

Le domaine où nous allons pénétrer, est d'une étendue considérable et les géomètres s'en sont relativement peu occupés. On peut prévoir que les méthodes d'investigation actuellement connues suffiront à peine pour les cas les plus simples, à savoir ceux où les courbes génératrices sont des coniques ou des cubiques gauches.

Toutes les coniques de l'espace sont en nombre ∞^8. Celles de ces courbes qui satisfont à i conditions forment une multiplicité de l'ordre $\mu = 8 - i$. Nous excluons d'abord les cas où l'on a $\mu > 2$; il se peut que ces cas présentent de l'intérêt; ce seraient des généralisations de la théorie des complexes de droites; mais ils ne peuvent entrer dans le plan que nous nous sommes proposé.

Quant aux systèmes doublement infinis de coniques, ils n'engendrent pas une figure, dans le sens ordinaire du mot; mais leurs plans enveloppent une surface. Dans une Note présentée à l'Académie royale de Belgique, nous avons déterminé la classe de cette surface, lorsque les courbes génératrices sont assujetties à

s'appuyer sur des directrices rectilignes ou autres et nous avons indiqué quelques conséquences relatives à des systèmes simplement infinis de coniques. Le contenu de cette Note, remanié et condensé, nous fournira la matière de notre Chapitre I.

Quelques cas particuliers de systèmes simplement infinis de coniques seront traités avec plus ou moins de détails dans le Chapitre II.

Pour les cubiques gauches, des considérations analogues à celles qui précèdent peuvent être formulées. Mais le nombre des cas possibles est beaucoup plus grand; d'autre part, la difficulté croissante du sujet nous oblige à restreindre beaucoup le champ à explorer. Nous nous bornons, dans le Chapitre III, à considérer un système spécial de ∞^2 cubiques et à examiner quelques formes qui prennent naissance quand on soumet ces courbes à une condition de plus.

Nous croyons que ces matières doivent tirer leur principal intérêt des méthodes utilisées pour les étudier. Nos trois chapitres correspondent à des procédés de recherche différents et, pour ne point trop allonger ce travail, nous avons renoncé à tirer de ces procédés tout ce qu'ils peuvent donner, nous contentant de les illustrer, en quelque sorte, par des exemples.

Qu'il nous soit permis de remercier Messieurs les Professeurs C. Servais, J. Neuberg et A. Demoulin pour l'appui bienveillant qu'ils nous ont prêté pendant la rédaction du présent travail.

CHAPITRE I.

Sur les plans coupant un système de lignes de l'espace en six points d'une conique.

1. L'étude des coniques qui s'appuient, par plus de cinq points, sur un système de lignes de l'espace, apparaît comme une extension de la théorie des plurisécantes des systèmes de courbes gauches.

Les étapes naturelles de cette recherche sont les suivantes.

1° Soient des lignes c_n, $c_{n'}$, ... dont l'ordre total est m; on cherche l'enveloppe des plans des coniques qui passent par i points de c_n, par i' points de $c_{n'}$, $\cdots$, $i + i' + \cdots$ étant égal à 6. Lorsque m est égal ou supérieur à six, ces courbes sont en nombre doublement infini et leurs plans enveloppent une surface.

2° Si $m \geq 7$ et si $i + i' + \cdots = 7$, les coniques en nombre simplement infini engendrent une surface et leurs plans enveloppent une développable.

3° Si $m \geq 8$ et $i + i' + \cdots = 8$, le nombre des coniques satisfaisant aux conditions énoncées est fini.

4° Si $m \geq 9$ et $i + i' + \cdots = 9$, il n'y a pas, en général, de coniques satisfaisant aux conditions imposées, mais, lorsqu'il en existe, cette circonstance établit une liaison entre les courbes directrices données.

Nous ne traiterons ici que le premier de ces quatre cas. De plus, les lignes données seront, par hypothèse, des courbes algébriques et même, sauf une exception, des courbes rationnelles.

2. Supposons, en premier lieu, que le système se réduise à une courbe unicursale unique c_m. Soit π un plan qui la coupe en m points dont six sont sur une même conique c_2. Par cette conique et par quatre points A, B, C, D, pris à volonté dans l'espace, on peut mener une quadrique S_2 qui coupe c_m en $2m$ points dont six sont dans un même plan. Récipro-

quement, si une quadrique S_2 passant par A, B, C, D coupe c_m en $2m$ points dont six sont dans un même plan π, cette quadrique contiendra toute la conique c_2 menée par cinq de ces six points et par suite, cette courbe c_2 passera aussi par le sixième point; à moins que S_2 ne dégénère en deux plans dont l'un sera π et dont nous appellerons l'autre π'. Mais, si A, B, C, D ne sont pas dans un même plan, dans le cas exceptionnel que nous venons de signaler, un de ces quatre points, au moins, sera dans le plan π et les autres dans le plan π'.

Cherchons la classe de la surface enveloppée par les plans tels que π, ou cherchons combien de plans pareils passent par une droite d prise à volonté, mais ne rencontrant aucune des droites AB, AC, AD, BC, BD, CD.

Nous devons donc déterminer combien de groupes de six points de c_m sont, à la fois, dans un plan passant par d et sur une quadrique non dégénérée passant par A, B, C, D.

Les quadriques S_2 menées par A, B, C, D forment un système linéaire quintuplement infini et marquent, sur la courbe rationnelle c_m, une involution I_5^{2m}, tandis que les plans menés par d y marquent une involution I_1^m. Le nombre des groupes de six points communs à ces deux involutions est, d'après un théorème de M. Le Paige,

$$C_1^{2m-5} \times C_5^{m-1} = (2m-5)\, C_5^{m-1}.$$

C_i^k représentant le nombre de combinaisons simples de k lettres i à i.

Mais, dans chacun des quatre plans $(d\text{A})$, $(d\text{B})$, $(d\text{C})$, $(d\text{D})$, il y a C_6^m groupes de six points situés sur une quadrique dégénérée et, d'après une remarque antérieure, ces groupes doivent être écartés, de sorte que le nombre des sextuples de points répondant à la question est

$$\nu = (2m-5)\, C_5^{m-1} - 4C_6^m.$$

Tel est aussi le nombre des plans π que l'on peut mener par d.

Les plans des coniques reposant, par six points, sur une courbe unicursale c_m enveloppent une surface dont la classe est

$$(2m-5)\, C_5^{m-1} - 4C_6^m.$$

Corollaires. I. Si $m = 6$, on a $\nu = 3$.

II. Une sextique unicursale étant de rang 10, les plans des coniques qui touchent la sextique en un point et la rencontrent encore en quatre autres enveloppent une développable dont la classe est 30.

III. Comme la développable osculatrice à la sextique rationnelle est de classe 12, il y a 36 coniques ayant, avec la sextique, un contact triponctuel et la rencontrant encore en trois autres points.

3. Soit un système composé d'une droite g et d'une courbe unicursale c_m. Par le raisonnement du n° 2, on voit que, si l'on cherche les quadriques non dégénérées passant par g et par deux points A et B de l'espace et coupant c_m en des groupes de m points dont cinq sont dans un plan mené par une droite d, le nombre obtenu est la classe de l'enveloppe des plans des coniques qui s'appuient une fois sur g et cinq fois sur c_m.

Un calcul, en tout pareil à celui du n° précédent, donne le résultat que voici.

Les plans des coniques qui ont un point sur une droite donnée et cinq points sur une courbe rationelle c_m enveloppent une surface dont la classe est

$$\nu = (2m - 4)\, C_4^{m-1} - 2C_5^m.$$

Corollaires. I. Les coniques dont le plan passe par un axe $\alpha\beta$ et qui reposent, par cinq de leurs points, sur une courbe c_m engendrent une surface dont l'ordre est ν.

II. Si $m = 5$, on a $\nu = 4$, pourvu que la droite g ne rencontre pas c_5; car, pour chaque intersection de g et de c_5, la classe se réduit, en général, d'une unité.

III. Les plans des coniques touchant c_5 et la rencontrant encore en trois points et s'appuyant de plus sur g enveloppent une développable de classe 32. Ou encore, les coniques dont le plan passe par un point et qui reposent, sur c_5, par cinq points dont deux coïncidents engendrent une surface dont l'ordre est 32. Si, au lieu de passer par un point, ces plans enveloppent une surface de classe μ, les coniques engendrent une surface dont l'ordre est 32μ.

IV. Il y a 36 coniques ayant un contact triponctuel avec c_5, reposant encore sur la courbe par deux points et rencontrant de plus une droite g. Ou encore, les coniques ayant un contact triponctuel avec c_5 et la rencontrant encore en deux points forment une surface du 36e ordre.

4. Si le système se compose d'une conique c_2 et d'une courbe unicursale c_m, on fait passer les quadriques S_2 par c_2 et par un point A de l'espace; on trouve ce théorème :

Les plans des coniques qui reposent, par deux de leurs points sur une conique et par quatre autres points sur une courbe c_m enveloppent une surface dont la classe est

$$\nu = (2m - 3)\, C_3^{m-1} - C_4^{m}.$$

Corollaires. I. Si c_2 est le cercle imaginaire de l'infini, ν est la classe de la surface enveloppée par les plans des cercles qui ont quatre points sur c_m.

II. Si $m = 4$, on a $\nu = 4$.

III. Les plans des cercles qui touchent la courbe rationnelle c_4 et la rencontrent encore en deux points enveloppent une développable de classe 24. Il y a 24 cercles osculateurs de c_4 qui rencontrent encore la courbe, etc.

5. Si le système se compose de deux droites g et g' et d'une courbe c_m, on mène les quadriques S_2 auxiliaires par g et g' (sans autre point fixe) et l'on trouve ce résultat :

Les plans des coniques qui coupent c_m en quatre points et deux droites données chacune en un point enveloppent une surface de classe

$$\nu = (2m - 3)\, C_3^{m-1}.$$

Corollaires. I. Les coniques qui reposent, par quatre points, sur c_m, et par un point sur une droite g, et dont le plan passe par un axe fixe $\alpha\beta$ engendrent une surface dont l'ordre est ν.

II. Si $m = 4$ on a $\nu = 5$.

III. Les coniques dont le plan passe par un point fixe, qui touchent la courbe rationnelle c_4, la rencontrent encore en deux points et s'appuient en outre sur une droite g engendrent une surface du 30[e] ordre. Les coniques ayant un contact triponctuel avec c_4, la rencontrant encore en un point et s'appuyant de plus sur une droite forment une surface du 30[e] ordre.

6. Si le système se compose d'une cubique gauche c_3 et d'une courbe unicursale c_m, les quadriques auxiliaires, en nombre ∞^2, passeront par c_3, sans autre point fixe, et l'on trouve :

Les plans des coniques qui rencontrent les courbes c_3 et c_m chacune en trois points enveloppent une surface dont la classe est

$$\nu = (2m - 2)\, C_2^{m-1}.$$

Corollaires. I. Si $m = 3$, on a $\nu = 4$(*).

II. Si deux cubiques gauches c_3 et c'_3 n'ont aucun point commun, il y a 64 coniques qui les touchent et les rencontrent encore l'une et l'autre. Il y a 12 coniques osculatrices à c_3 et passant par trois points de c'_3, et inversement.

7. Si le système se compose d'une biquadrique C_4 de première espèce et d'une courbe rationnelle c_m, les ∞^1 quadriques auxiliaires passeront par C_4.

Les plans des coniques qui passent par quatre points de C_4 *et deux points de* c_m *enveloppent une surface de classe*

$$\nu = (2m - 1)(m - 1).$$

Si $m = 2$, on a $\nu = 3$.

Si la courbe c_m est remplacée par deux droites qui ne se coupent pas, les quadriques auxiliaires marquent, sur les deux droites, une correspondance (2, 2); tout plan mené par deux points correspondants contient une conique répondant à la question; la surface enveloppée est donc le lieu des droites qui joignent des points homologues de cette correspondance.

Les plans des coniques qui rencontrent C_4 *en quatre points et deux droites données chacune en un point enveloppent une surface réglée de quatrième classe.*

Cette surface est donc aussi du quatrième ordre. C'est la première dans la classification des surfaces réglées du quatrième ordre de Cayley(**) et la onzième de Cremona(***).

8. Bien qu'il n'y ait pas impossibilité absolue à employer les méthodes qui vont suivre pour des systèmes assez généraux, nous nous bornerons, dans les cas ci-après, à examiner des systèmes de directrices dont l'ordre total est 6.

Soient d'abord une cubique gauche c_3, une conique c_2 et une droite g sans points communs.

En menant des quadriques S_2 par c_3, il suffit de chercher l'enveloppe

(*) Reye, *Journ. f. Math.* t. 79.
(**) *Phil. Trans.*, 1864.
(***) *Mem. Acc. Bologna* (2), VIII.

des plans passant par deux des intersections de S_2 avec c_2 et une intersection de S_2 avec g. Considérons une droite $\alpha\beta$ quelconque de l'espace.

Par tout point A de g passe un plan ($\alpha\beta$, A) qui coupe c_2 en deux points situés, avec c_3, sur une quadrique S_2; celle-ci coupe g en deux points B. Inversement, un point B de g détermine un faisceau de quadriques S_2 qui marquent, sur c_2, une involution I_1^4, tandis que les plans par $\alpha\beta$ y marquent une involution I_1^2; ces involutions ont trois couples communs déterminant chacun un plan par $\alpha\beta$ et un point A sur g. Il existe donc, entre les points A et B, une correspondance (2, 3) donnant cinq coïncidences.

Les plans des coniques qui reposent, par trois points sur une cubique gauche, par deux points sur une conique donnée et par un point sur une droite donnée enveloppent une surface de cinquième classe.

Corollaires. Les cercles dont le plan passe par $\alpha\beta$ et qui passent par trois points de c_3 engendrent une surface du cinquième ordre. Les cercles dont le plan passe par un point, qui touchent c_3 et la coupent encore en un point engendrent une surface du 20ᵉ ordre. Les cercles osculateurs d'une cubique gauche engendrent une surface du 15ᵉ ordre (*).

9. Supposons le système formé par une cubique gauche c_3 et trois droites g, g', g''. Il suffit de compter les plans passant par $\alpha\beta$ qui coupent g, g', g'' en trois points d'une même quadrique circonscrite à c_3.

Soit A un point de g; le plan ($\alpha\beta$, A) coupe g' et g'' respectivement en B et C; par c_3, B et C, il passe une quadrique coupant g en deux points D. Inversement, par un point D de g, il passe un faisceau de quadriques circonscrites à c_3 et elles marquent, sur g' et g'', une correspondance (2, 2); donc il existe quatre plans par $\alpha\beta$ contenant des points correspondants et par suite quatre points A de g répondant à D. Entre les points A et D, il y a donc une correspondance (2, 4) présentant six coïncidences.

Les plans des coniques qui rencontrent trois droites et qui coupent une cubique gauche en trois points enveloppent une surface de sixième classe.

Corollaires. Les coniques dont le plan passe par un axe $\alpha\beta$ et qui reposent sur g et g' et rencontrent c_3 en trois points engendrent une

---

(*) Propriété connue : voir Timerding, *Ueber die Kugeln, welche eine cubische Raumcurve mehrfach oder mehrpunktig berühren* (Diss. Strasbourg, 1894).

surface du sixième ordre. Les coniques dont le plan passe par un point, qui s'appuient sur g et g', qui de plus touchent c_3 en un point et la rencontrent en un autre engendrent une surface du 24e ordre. Les coniques osculatrices à c_3 et s'appuyant sur g et g' engendrent une surface du 18e ordre.

10. Soit un système composé de trois coniques c_2, c_2', c_2''. Les quadriques auxiliaires S_2 seront menées par c_2'' et par un point A de l'espace.

1° Par un point fixe B de c_2, combien peut-on mener de ces quadriques S_2 coupant c_2 en un point X autre que B et c'_2 en deux points Y et Y', de manière que le plan XYY' passe par l'axe $\alpha\beta$? Prenons, sur c_2, un point X autre que B ; le plan ($\alpha\beta$, X) coupe c_2' en Y et Y'; la quadrique S_2 menée par c_2'', A, B, Y et Y' coupe c_2 en trois points Z autres que B. Inversement. prenons, sur c_2, un point Z autre que B; les quadriques S_2 par c_2'', A, B, Z forment un faisceau et marquent, sur c_2', une involution I_1^4, tandis que les plans par $\alpha\beta$ y marquent une involution I_1^2; les plans menés par $\alpha\beta$ et par les trois couples communs aux deux involutions donnent six points X sur c_2; entre les points X et Z, il y a une correspondance (3, 6) et neuf coïncidences.

2° Celà étant, prenons, sur c_2, un point quelconque B; le plan ($\alpha\beta$, B) coupe c_2' en P, Q et rencontre encore c_2 en un point C, généralement différent de B; la quadrique S_2 menée par c_2'', A, C, P, Q coupe encore c_2 en trois points D autres que C. Inversement, prenons un point D sur c_2; d'après ce qui a été dit au 1°, il y a neuf points C de c_2 situés, avec deux points de c_2', à la fois dans un plan passant par $\alpha\beta$ et sur une quadrique S_2 contenant c_2'', A, D, et chacun des neuf plans ($\alpha\beta$, C) donne un nouveau point B sur c_2. Entre les points B et D, il existe donc une correspondance (3, 9) et douze coïncidences.

Mais, comme chaque plan coupe c_2 en deux points, ces douze coïncidences sont dans six plans seulement, d'où il faut encore déduire le plan ($\alpha\beta$, A) qui correspond à une quadrique S_2 dégénérée. On a donc ce théorème.

Les plans des coniques qui rencontrent deux fois trois coniques données enveloppent une surface de cinquième classe (*).

(*) Ce théorème a été démontré, d'une autre manière, par M. J. Neuberg (*Bull. de l'Acad. roy. de Belgique*, décembre 1901).

Corollaires. Les plans des cercles rencontrant deux coniques chacune en deux points enveloppent une surface de cinquième classe. Les plans des cercles touchant une conique c_2 et passant par deux points d'une autre conique enveloppent une développable de 10ᵉ classe. Il y a 20 cercles tangents à la fois à deux coniques.

11. Si le système se compose de deux coniques et de deux droites, on fait passer les quadriques auxiliaires par ces deux droites, sans autre point fixe. Le raisonnement est le même que dans le n° précédent, mais la réduction finale disparaît.

Les plans des coniques rencontrant deux coniques données chacune en deux points et deux droites données chacune en un point enveloppent une surface de sixième classe.

Corollaires. Les cercles dont le plan passe par un axe et qui passent par deux points d'une conique c_2 et par un point d'une droite g engendrent une surface du sixième ordre. Les cercles dont le plan passe par un point et qui touchent c_2 et rencontrent g engendrent une surface du 12ᵉ ordre.

12. Soit un système formé d'une conique c_2 et de quatre droites g, g', g'', g'''. Les quadriques auxiliaires S_2 passent par c_2 et par un point A de l'espace.

1° Par deux points fixes, B sur g, C sur g', combien peut-on mener de ces quadriques S_2 passant par un point X de g'' et un point Y de g''' de manière que X, Y et l'axe $\alpha\beta$ soient dans un même plan? Soit X un point de g''; le plan ($\alpha\beta$, X) coupe g''' en un point Y et la quadrique menée par c_2, A, B, C, Y coupe g'' en deux points Z. Inversement, prenons un point Z sur g''; c_2, A, B, C, Z déterminent une quadrique S_2 coupant g''' en deux points Y et chacun des plans ($\alpha\beta$, Y) donne, sur g'', un point X; la correspondance des points X et Z est donc (2, 2) et donne quatre coïncidences.

2° Par un point fixe B de g, combien peut-on mener de quadriques S_2 passant par des points X de g', Y de g'', U de g''', de manière que le plan XYU passe par $\alpha\beta$? D'après les mêmes principes et en appliquant le résultat précédent, on trouve une correspondance (2, 4) et six coïncidences.

3° Enfin on reconnaît, par un procédé identique, qu'il existe $2 + 6 = 8$ plans, par $\alpha\beta$, coupant g, g', g'', g''' en des points d'une

quadrique contenant c_2 et A; mais ($\alpha\beta$, A) est un de ces plans et doit être exclu. On a donc ce théorème :

Les plans des coniques qui s'appuient sur quatre droites données et qui passent par deux points d'une conique donnée enveloppent une surface de septième classe.

Corollaires. I. Les coniques dont le plan passe par un axe $\alpha\beta$ et qui coupent c_2 en deux points en s'appuyant de plus sur g, g', g'' engendrent une surface du septième ordre. Les coniques dont le plan passe par un point, qui touchent une conique et qui rencontrent trois droites données engendrent une surface du 14e ordre.

II. Les cercles dont le plan passe par un axe et qui reposent sur trois droites enveloppent une surface du septième ordre.

13. Soit enfin un système de six droites. Le raisonnement est le même que dans le cas précédent; seulement les quadriques S_2 passent par deux des six droites, au lieu de passer par c_2 et A; il n'y a donc pas de réduction finale.

Les plans des coniques qui reposent sur six droites enveloppent une surface de huitième classe (*).

Nous ferons usage du corollaire suivant.

Les coniques dont le plan passe par un axe $\alpha\beta$ et qui reposent sur cinq directrices rectilignes engendrent une surface du huitième ordre.

Cette surface sera étudiée, avec quelques détails, au Chapitre II.

14. Si de toute la discussion qui précède (nº 2 à 13), nous ne retenons que les cas où l'ordre total du système des directices est égal à 6, nous pouvons résumer, de la manière suivante, les résultats obtenus.

(*) Ce résultat est connu. M. Hierholzer a résolu la question corrélative et a étudié (*Math. Ann.*, t. 2) le lieu des sommets des cônes du second ordre qui touchent six droites. Le même problème a été repris par Cayley (*Math. Ann.*, t. 4).

Ainsi que nous l'avons annoncé, notre intention n'est pas d'étudier les systèmes simplement infinis de coniques reposant, par sept points, sur des directrices, ni les coniques, en nombre fini, qui reposent, par huit points, sur ces directrices. Mentionnons seulement que M. Lüroth (*Journ. f. Math.*, t. 68) et, tout récemment M. J. De Vries (Koninklijke Academie v. Wetenschappen, Amsterdam, septembre 1901) ont donné le nombre des coniques reposant sur huit droites.

Étant donné, dans l'espace, un ensemble de lignes unicursales d'ordres respectifs n, n', ..., de manière que l'on ait

$$n + n' + \cdots = 6,$$

si toutes ces lignes sont, deux à deux, sans points communs, les plans qui les rencontrent en six points d'une conique enveloppent une surface dont la classe est égale à

$$\nu = 8 - (n - 1) - (n' - 1) - \cdots$$

Cette surface contient toutes les quadrisécantes du système de directrices, car tout plan par une quadrisécante coupe ces lignes en six points d'une conique dégénérée; la surface contient aussi évidemment toutes les directrices.

On suppose expressément que les directrices n'ont pas de points communs. Car, si deux des directrices passent par un point M, la classe de la surface enveloppée se réduit, en général, d'une unité : tout plan passant par M coupe, en effet, les directrices en cinq points distincts seulement qui sont toujours sur une conique. La surface de classe ν dégénère en ce point M et une surface de classe $\nu - 1$. Toutefois, pour être certain que le point M ne doit pas être compté plus d'une fois, il faut traiter quelques exemples par le principe de correspondance appliqué ci-dessus : la réponse est généralement négative.

Ainsi, dans le cas d'une droite, d'une conique et d'une cubique gauche passant par deux points de la conique, les plans des coniques reposant, par six points, sur ce système enveloppent une surface, non plus de la cinquième, mais de la troisième classe. Par suite, les cercles dont le plan tourne autour d'un axe et qui passent par trois points d'une cubique gauche circulaire engendrent une surface du troisième ordre. Et les cercles osculateurs d'une telle cubique gauche engendrent une surface du neuvième ordre.

Un autre exemple a servi de point de départ à M. Reye pour des recherches intéressantes : deux cubiques gauches, ayant un point commun, déterminent, par le procédé que nous étudions ici, une surface de troisième classe; mais ces deux courbes sont aussi sur une surface du troisième ordre. M. Reye(*) examine les relations de ces surfaces; il

(*) Reye, *Beziehungen der allgemeinen Fläche 3ter Ordnung zù einer covarianten Fläche 3ter Classe* (*Math. Ann.*, t. 55).

remarque notamment qu'elles passent toutes deux par les six bisécantes communes des deux cubiques; ces bisécantes forment, sur les deux surfaces, la moitié d'un double-sixain de SCHLÄFLI.

Lorsque le système des directrices comprend des points par où passent plus de deux courbes, la réduction subie par la classe ν obéit à une loi qui ne paraît pas susceptible d'une expression simple; on peut s'en assurer dans des cas particuliers.

CHAPITRE II.

Sur certaines surfaces algébriques engendrées par des systèmes de coniques.

15. Si l'on prend le système le plus général de ∞^1 coniques, ces courbes engendrent une surface S et leurs plans enveloppent une développable Γ; la surface S est évidemment déterminée par la développable Γ et par cinq directrices dont chacune contiendra généralement un point de chaque génératrice. On sait aussi que la développable tangente à deux coniques génératrices infiniment voisines tend vers la développable circonscrite à la surface S le long d'une de ces coniques.

Tel est le point de départ d'un mémoire important de M. Ed. Weyr (*). Les développements qui vont suivre n'auront guère que cette origine commune avec le travail cité; nous prendrons immédiatement un autre chemin.

Soit $\alpha\beta$ l'intersection de deux plans α et β infiniment voisins tangents à Γ, ou soit $\alpha\beta$ la génératrice de contact du plan α contenant une des coniques c_2 qui décrivent S. Imaginons une surface S′ engendrée par une conique dont le plan tourne autour de $\alpha\beta$ comme axe fixe et qui admet le même système de directrices que la surface S. Il est clair que S′ aura, le long de c_2, la même développable circonscrite que S. Donc certaines constructions relatives à la surface S se déduisent de constructions analogues relatives à la surface S′.

D'un autre côté l'ordre de la surface S dépend de l'ordre de S′. En effet, adjoignons, au système c des directrices de S une droite g indépendante, c'est-à-dire une droite n'ayant, avec les lignes de c, aucune relation spéciale, telle que point commun, etc. Les plans des coniques

---

(*) Ed. Weyr, *Zur Theorie der Flächen, welche eine Schar von Kegelschnitten enthalten* (Monatshefte f. Math. u. Phys., t. II).

qui reposent, par six points, sur le système $c+g$ enveloppent une surface U de classe μ par exemple. Si ν est la classe de la développable Γ, il existe, en général, $\mu\nu$ plans tangents communs à U et Γ, donc $\mu\nu$ coniques reposant, par six points, sur $c+g$ et dont le plan touche Γ. Par suite, les coniques dont le plan touche Γ et qui reposent, par cinq points, sur c, engendrent une surface rencontrée $\mu\nu$ fois par une droite quelconque; l'ordre de cette surface est donc $\mu\nu$. Si la développable Γ est remplacée par un axe fixe, la surface S d'ordre $\mu\nu$ est remplacée par une surface S′ d'ordre μ.

16. Les considérations qui précèdent nous amènent à donner une attention spéciale aux surfaces S′ et à leur accorder la priorité. Dans le présent chapitre, nous nous bornons même à l'étude de cette famille de surfaces. Lorsque l'ordre total des directrices est précisément égal à cinq, chaque directrice de degré m est coupée m fois par une conique génératrice c_2. Soit n l'ordre de la surface engendrée. Tout plan mené par l'axe $\alpha\beta$ contient une seule conique c_2 et l'axe $\alpha\beta$ est donc une droite multiple dont le degré de multiplicité est $n-2$.

Prenons l'axe pour arête $x_1 = x_2 = 0$ du tétraèdre de référence et désignons par φ_i une fonction quelconque, entière et homogène en x_1, x_2 et du degré i. L'équation de la surface sera de la forme

$$\varphi_n + 2x_3\varphi_{n-1} + 2x_4\varphi'_{n-1} + x_3^2\varphi_{n-2} + 2x_3x_4\varphi'_{n-2} + x_4^2\varphi''_{n-2} = 0.$$

Coupons par un plan $x_1 = \lambda x_2$ et représentons par ψ_i la fonction φ_i où x_1 et x_2 sont remplacés par λ et 1. Nous aurons

$$x_2^{n-2}(x_2^2\psi_n + 2x_2x_3\psi_{n-1} + 2x_2x_4\psi'_{n-1} + x_3^2\psi_{n-2} + 2x_3x_4\psi'_{n-2} + x_4^2\psi''_{n-2}) = 0.$$

La conique située dans le plan $x_1 = \lambda x_2$ dégénère en deux droites pour les valeurs de λ qui satisfont à l'équation

$$\begin{vmatrix} \psi_n & \psi_{n-1} & \psi'_{n-1} \\ \psi_{n-1} & \psi_{n-2} & \psi'_{n-2} \\ \psi'_{n-1} & \psi'_{n-2} & \psi''_{n-2} \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est du degré $3n-4$ en λ.

Donc, *si une surface d'ordre n est engendrée par des coniques dont le plan passe par un axe fixe, il y a, en général,* $3n-4$ *de ces coniques qui dégénèrent en deux droites.*

Si toutes les coniques du système passent par deux points fixes O et O′

de l'axe, on choisira ces points comme sommets du tétraèdre de référence et l'on aura $\psi_{n-2} \equiv 0$ et $\psi'_{n-2} \equiv 0$.

Il y a $n-2$ valeurs de λ qui annulent ψ'_{n-2} et, pour ces valeurs, la conique dégénère en deux droites dont l'une coïncide avec OO'. Ou bien, il y a $n-2$ nappes de la surface qui sont tangentes à un même plan tout le long de OO'. Ces $n-2$ valeurs de λ sont comprises parmi les $3n-4$ solutions de l'équation précédente; par suite, il y a encore $2n-2$ autres coniques dégénérant en deux droites dont l'une passe par O et l'autre par O'.

Nous avons emprunté cette remarque à un mémoire de M. Blutel(*).

Si donc, dans les cas particuliers, nous découvrons $3n-4$ coniques dégénérant en deux droites différentes de l'axe, nous pourrons affirmer qu'il n'y a point de nappe de la surface tangente à un même plan tout le long de l'axe $\alpha\beta$.

17. Supposons maintenant une surface engendrée par une conique dont le plan tourne encore autour d'un axe, mais qui rencontre, chacune en un seul point, cinq directrices curvilignes d'ordres respectifs n_1, n_2, n_3, n_4, n_5. Soit g une droite quelconque de l'espace; appelons $\delta(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5)$ l'ordre de la surface considérée et $\delta(n_1, n_2, n_3, n_4, 1)$ l'ordre d'une surface analogue, où la directrice n_5 est remplacée par la droite g. Cette dernière surface rencontre, en général, la courbe n_5 en $n_5 \times \delta(n_1, n_2, n_3, n_4, 1)$ points et ce même nombre exprime combien de génératrices de la première surface rencontrent g; on a donc

$$\delta(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) = n_5 \times \delta(n_1, n_2, n_3, n_4, 1).$$

On procède de même de proche en proche et l'on a finalement

$$\delta(n_1, n_2, n_3, n_4, n_5) = n_1 n_2 n_3 n_4 n_5 \, \delta(1, 1, 1, 1, 1).$$

Or, d'après le n° 13, $\delta(1, 1, 1, 1, 1) = 8$.

D'autre part, on voit, par des considérations d'infiniment petits, que la développable circonscrite à la surface à directrices curvilignes, le long d'une conique c_2 qui passe par les points A, B, C, D, E de ces directrices, se confond avec la développable circonscrite, le long de cette même conique, à une autre surface qui aurait pour directrices les tangentes, en A, B, C, D, E, aux directrices courbes.

(*) *Ann. de l'École Normale* (3), VII.

Ainsi, *la surface à cinq directrices curvilignes rencontrées une fois par chaque conique génératrice dépend de la surface à cinq directrices rectilignes, en ce qui concerne certaines propriétés et notamment l'ordre.*

18. Par tout ce qui précède, nous sommes conduit à choisir, pour l'étude plus approfondie, la surface engendrée par des coniques dont le plan passe par un axe $\alpha\beta$ et qui s'appuient sur cinq directrices rectilignes.

Cette figure nous a été signalée par M. J. Neuberg. Par une coïncidence heureuse, c'est aussi, dans l'ordre d'idées que nous exposons ici, la surface la plus générale dont nous ayons pu établir l'équation.

Puisque nous savons qu'elle est du huitième ordre, nous la désignerons par S_8. Nous savons aussi qu'elle admet pour droite sextuple l'axe $\alpha\beta$ que nous supposons déterminé par l'intersection de deux plans $\alpha_x = 0$, $\beta_x = 0$. Elle contient les cinq directrices $\gamma\delta$, $\gamma'\delta'$, $\gamma''\delta''$, $\varepsilon\varphi$, $\varepsilon'\varphi'$, chacune déterminée de même par deux plans ; nous désignons par C, C′, C″, E, E′ les points où ces directrices sont rencontrées par une conique génératrice c_2. Par hypothèse, les directrices et l'axe sont des droites indépendantes, c'est-à-dire que deux d'entre elles ne se coupent pas, que quatre d'entre elles ne sont pas des rayons d'un même système réglé, etc.

La surface S_8 contient les dix couples de droites i, réelles ou imaginaires conjuguées, rencontrant à la fois l'axe $\alpha\beta$ et trois des directrices, car ces droites i appartiennent à des coniques c_2 dégénérées ; S_8 contient aussi vingt droites j s'appuyant chacune sur $\alpha\beta$, sur une droite i et sur les deux directrices qui ne rencontrent pas i, car les droites j complètent les coniques dégénérées dont font partie les droites i. Le nombre de vingt coniques dégénérées concorde avec le résultat du n° 16 et il n'y a pas de nappe de S_8 tangente à un même plan tout le long de $\alpha\beta$.

La surface S_8 possède, outre l'axe et les directrices, quarante lignes droites.

19. Pour rendre l'étude actuelle indépendante du Chapitre I, supposons que l'on ne connaisse pas l'ordre de la surface S_8. On pourrait néanmoins reconnaître directement que cette surface est unicursale. Car, par un de ses points, M, on peut mener une droite unique, h, rencontrant à la fois $\alpha\beta$ et une directrice $\gamma\delta$ choisie à volonté ; h perce un plan π en un point P, image de M. Réciproquement, la droite menée de

P et s'appuyant sur $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$ ne rencontre plus S_8 qu'en un seul autre point M.

Ainsi, *la surface* S_8 *est représentable sur un plan ou unicursale.*

20. D'après celà, les coordonnées d'un point M de S_8 doivent pouvoir s'exprimer en fonctions rationnelles de deux paramètres.

Le choix de ces paramètres est aisé : le premier sera la quantité ω telle que

$$\alpha_x + \omega\beta_x = 0$$

représente le plan $(\alpha\beta, M)$; le second sera le rapport anharmonique du point M et des points C, C′, C″ où la conique c_2 passant par M coupe trois des directrices choisies à volonté et rangées dans un ordre arbitraire mais fixe.

Ce rapport anharmonique λ est aussi celui des plans qui projettent C, C′, C″, M des deux axes $\varepsilon\varphi$, $\varepsilon'\varphi'$, puisque les traces de ces axes sur le plan de c_2 appartiennent aussi à c_2. Représentons les plans ci-après par les équations écrites en regard

$(\varepsilon\varphi, C)$,	$\varepsilon_x + k_1\varphi_x = 0$,	$(\varepsilon'\varphi', C)$,	$\varepsilon'_x + l_1\varphi'_x = 0$.
$(\varepsilon\varphi, C')$,	$\varepsilon_x + k_2\varphi_x = 0$,	$(\varepsilon'\varphi', C')$,	$\varepsilon'_x + l_2\varphi'_x = 0$,
$(\varepsilon\varphi, C'')$,	$\varepsilon_x + k_3\varphi_x = 0$,	$(\varepsilon'\varphi', C'')$,	$\varepsilon'_x + l_3\varphi'_x = 0$,
$(\varepsilon\varphi, M)$,	$\varepsilon_x + k\varphi_x = 0$,	$(\varepsilon'\varphi', \mu)$,	$\varepsilon'_x + l\varphi'_x = 0$.

On doit donc avoir

$$(1) \qquad \frac{k_1 - k_3}{k_2 - k_3} \times \frac{k_2 - k}{k_1 - k} = \frac{l_1 - l_3}{l_2 - l_3} \times \frac{l_2 - l}{l_1 - l} = \lambda.$$

Calculons k_1 : les plans $(\varepsilon\varphi, C)$, γ_x, δ_x et le plan $(\alpha\beta, M)$ représenté par $\alpha_x + \omega\beta_x = 0$ se coupent en un même point; donc on a

$$| \; \varepsilon_i + k_1\varphi_i \quad \gamma_i \quad \delta_i \quad \alpha_i + \omega\beta_i \; | = 0, \quad (i = 1, 2, 3, 4),$$

ou encore

$$(2) \qquad (\varepsilon\gamma\delta\alpha) + k_1(\varphi\gamma\delta\alpha) + \omega(\varepsilon\gamma\delta\beta) + k_1\omega(\varphi\gamma\delta\beta) = 0.$$

On trouve, d'une manière analogue, des équations donnant k_2, k_3, l_1, l_2, l_3 en fonctions de ω.

Substituant, dans (1), ces fonctions à k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3, et y remplaçant k par $\frac{-\varepsilon_x}{\varphi_x}$, l par $\frac{-\varepsilon_x}{\varphi'_x}$, on a deux relations linéaires en x,

linéaires en λ, cubiques en ω; à ces relations on joindra l'équation

$$\alpha_x + \omega\beta_x = 0.$$

On aura ainsi trois égalités qui permettront de trouver les variables x_1, x_2, x_3, x_4, proportionnelles à des fonctions entières et du septième degré en ω, du second degré en λ. Si, entre ces égalités, on élimine λ et ω, on a l'équation de la surface S_8. Si l'on y regarde λ comme constante, elles représentent une courbe gauche unicursale, du septième ordre, c_7.

Un plan mené par $\alpha\beta$ ne coupe c_7 qu'en un seul point non situé sur $\alpha\beta$; donc cet axe est une sécante sextuple de c_7. Comme on peut combiner, de dix manières, les cinq directrices trois à trois et comme on peut faire varier λ, la surface S_8 contient dix systèmes de ∞^1 courbes c_7; quelques unes de ces lignes peuvent remplacer, comme directrices de la surface, le même nombre de directrices rectilignes données.

Nous avons donc démontré ce théorème :

Le lieu d'un point M *de* S_8 *qui forme un rapport anharmonique constant avec les points d'appui de* c_2 *sur trois directrices est une courbe rationnelle du septième ordre ayant l'axe* $\alpha\beta$ *pour sécante sextuple.*

21. D'après ce qu'on vient de voir, l'équation de la surface S_8 résulte de l'élimination des k, des l, de λ et de ω entre les relations (1), les égalités $\varepsilon_x + k\varphi_x = 0$, $\varepsilon'_x + l\varphi'_x = 0$, celles qui donnent $k_1, k_2, k_3, l_1, l_2, l_3$, en fonction de ω et enfin $\alpha_x + \omega\beta_x = 0$.

λ est éliminé si l'on réduit le système (1) à l'équation

$$\frac{k_1 - k_3}{k_2 - k_3} \times \frac{k_2 - k}{k_1 - k} = \frac{l_1 - l_3}{l_2 - l_3} \times \frac{l_2 - l}{l_1 - l}. \tag{3}$$

On y remplace d'abord k par $-\frac{\varepsilon_x}{\varphi_x}$, l par $-\frac{\varepsilon'_x}{\varphi'_x}$; puis, pour éliminer ω, on le remplacera par $-\frac{\alpha_x}{\beta_x}$ dans l'équation (2) et les cinq analogues, ce qui donnera k_1 sous forme d'un rapport de deux fonctions linéaires et homogènes en α_x, β_x, soit

$$k_1 = \frac{f_1(\alpha_x, \beta_x)}{F_1(\alpha_x, \beta_x)}.$$

On trouvera de même

$$k_2 = \frac{f_2}{F_2}, \quad k_3 = \frac{f_3}{F_3}.$$

En portant ces valeurs dans le premier membre de l'équation (3), on trouve.

$$\frac{f_1F_3 - f_3F_1}{f_2F_3 - f_3F_2} \times \frac{f_2\varphi_x + F_2\varepsilon_x}{f_1\varphi_x + F_1\varepsilon_x};$$

le second membre ne diffère du premier que par la substitution des symboles ε', φ' à ε, φ (ces derniers sont implicitement dans les f et F).

Les points dont les coordonnées annulent $f_1F_3 - f_3F_1$ sont situés dans deux plans χ passant par $\alpha\beta$, car la fonction $f_1F_3 - f_3F_1$ est quadratique et homogène en α_x et β_x; de plus, pour tout point M situé dans un de ces plans χ, k_1 $\left(\text{ou}\,\frac{f_1}{F_1}\right)$ est égal à k_3 $\left(\text{ou}\,\frac{f_3}{F_3}\right)$ et les plans ($\varepsilon\varphi$, C) et ($\varepsilon\varphi$, C″) coïncident, c'est-à-dire que chaque plan χ coupe $\gamma\delta$, $\gamma''\delta''$ et $\varepsilon\varphi$ en trois points alignés. En d'autres termes encore, les quatre droites $\alpha\beta$. $\gamma\delta$, $\gamma''\delta''$, $\varepsilon\varphi$ sont rencontrées par deux droites i réelles ou imaginaires conjuguées; les plans χ sont les plans ($\alpha\beta$, i).

Pareillement, $f_2F_3 - f_3F_2 = 0$ représente deux plans par $\alpha\beta$ qui coupent $\gamma'\delta'$, $\gamma''\delta''$, $\varepsilon\varphi$ en trois points alignés.

Pour tout point M dont les coordonnées annulent $f_2\varphi_x + F_2\varepsilon_x$, k_2 est égal à k, c'est-à-dire que les plans ($\varepsilon\varphi$, C′) et ($\varepsilon\varphi$, M) coïncident ou qu'il existe une droite issue de M et s'appuyant sur $\alpha\beta$, $\gamma'\delta'$, $\varepsilon\varphi$; le lieu de ces points est l'hyperboloïde passant par $\alpha\beta$, $\gamma'\delta'$, $\varepsilon\varphi$.

Pareillement, $f_1\varphi_x + F_1\varepsilon_x = 0$ représente l'hyperboloïde déterminé par $\alpha\beta$. $\gamma\delta$, $\varepsilon\varphi$.

Le second membre de l'équation de S_8 aura une interprétation analogue, sauf substitution de $\varepsilon'\varphi'$ à $\varepsilon\varphi$.

Il convient de condenser encore les notations : numérotons 1, 2, 3, 4, 5 les directrices $\gamma\delta$, $\gamma'\delta'$, $\gamma''\delta''$, $\varepsilon\varphi$, $\varepsilon'\varphi'$.

Désignons par ($\alpha\beta$) (h, h', h'') l'ensemble des deux plans qui contiennent $\alpha\beta$ et qui coupent, en des points alignés, les directrices numérotées h, h', h'' et soit ($\alpha\beta$) (h, h', h'') = 0 l'équation de ce couple de plans. Appelons ($\alpha\beta$, h, h') l'hyperboloïde ayant pour génératrices d'un même système l'axe $\alpha\beta$ et les directrices numérotées h et h', et soit ($\alpha\beta$, h, h') = 0 l'équation de cet hyperboloïde.

Le premier membre des équations que nous venons de définir peut-être affecté d'un facteur numérique arbitraire; l'équation de la surface S_8 aura donc la forme

$$(4)\quad \frac{T_8}{U_8} = \frac{[(\alpha\beta)\,(1,\,3,\,4)]\,[(\alpha\beta)\,(2,\,3,\,5)]\,(\alpha\beta,\,2,\,4)\,(\alpha\beta,\,1,\,5)}{[(\alpha\beta)\,(2,\,3,\,4)]\,[(\alpha\beta)\,(1,\,3,\,5)]\,(\alpha\beta,\,1,\,4)\,(\alpha\beta,\,2,\,5)} = \text{constante.}$$

22. Chacune des surfaces T_8 et U_8 se décompose en deux couples de plans et deux quadriques; la directrice 3 est la seule qui n'appartienne à aucune de ces surfaces partielles; le fait qu'elle se trouve sur S_8 peut servir à déterminer la constante du second membre; il suffit, en effet, de remplacer, dans le premier membre, les coordonnées courantes par les coordonnées d'un point de 3.

On sait que les coordonnées homogènes x_i d'un point peuvent être regardées comme des fonctions linéaires ξ_i des coordonnées cartésiennes multipliées par un facteur ρ qui peut varier d'un point à l'autre, tandis que les coefficients des fonctions ξ sont les mêmes pour tous les points. Seulement le coefficient ρ n'affecte pas la fraction $\frac{T_8}{U_8}$ dont les termes sont homogènes et du même degré. On peut donc imaginer que l'on opère dans un système de coordonnées cartésiennes, et la valeur que prend $\frac{T_8}{U_8}$ quand on y remplace les variables par les coordonnées d'un point M est le rapport des puissances P_t, P_u de ce point relativement aux deux systèmes T_8, U_8, ces puissances étant comptées dans une direction donnée Δ et multipliées par des constantes c_t, c_u qui dépendent des coefficients des formes T_8, U_8, ξ_i et de la direction Δ, mais non du point choisi M.

On isole une directrice quelconque 3, *on répartit les autres, de deux manières, en deux couples tels que* 1, 4; 2, 5 et 2, 4; 1, 5. *On considère : d'une part, les quatre plans qui projettent, de* $\alpha\beta$, *les droites s'appuyant sur* 3 *et sur chacun des deux premiers couples; plus les deux hyperboloïdes ayant pour génératrices d'un même système* $\alpha\beta$ *et chacun des deux derniers couples; — d'autre part, quatre plans et deux hyperboloïdes analogues aux précédents et obtenus en intervertissant les couples* 1, 4; 2, 5 *avec* 2, 4; 1, 5. *Le rapport des puissances, dans une direction* Δ, *d'un point quelconque de la droite* 3 *relativement aux deux systèmes ci dessus définis est une constante* μ. *La surface* S_8 *est le lieu des points dont les puissances, dans la même direction, relativement aux mêmes systèmes, est la même constante* μ.

23. Il est naturel de prendre, pour la direction Δ, la droite 3 elle-même; or, les points où elle perce les plans $(\alpha\beta)(1, 3, 4)$ sont les mêmes que ceux où elle rencontre l'hyperboloïde $(\alpha\beta, 1, 4)$ et de même pour les

autres couples de plans et hyperboloïdes ; par suite, pour un point de 3, on a $P_t = P_u$ et, dans l'équation (4), la constante du second membre est $c_t : c_u$. Donc, pour tout point M de S_8, on a $P_t = P_u$, ce qu'on peut énoncer de la manière suivante.

Si par un point M *on mène une droite* 6 *parallèle à* 3; *si cette droite coupe, en* P_1, P_2, ..., P_8, *les quatre couples de plans* $(\alpha\beta)$ (1, 3, 4), $(\alpha\beta)$ (2, 3, 5), $(\alpha\beta)$ (2, 6, 4), $(\alpha\beta)$ (1, 6, 5), *et en* Q_1, Q_2, ..., Q_8, *les plans* $(\alpha\beta)$ (2, 3, 4), $(\alpha\beta)$ (1, 3, 5), $(\alpha\beta)$ (1, 6, 4), $(\alpha\beta)$ (2, 6, 5), *l'égalité*

$$MP_1 . MP_2 \ldots MP_8 = MQ_1 . MQ_2 \ldots MQ_8$$

caractérise les points de la surface S_8.

Quant au rôle spécial de la directrice 3, il provient du choix des directrices 4 et 5 comme axes de faisceaux et de la forme donnée au rapport anharmonique λ; ces choix sont arbitraires et chaque directrice peut être amenée à jouer le rôle spécial de 3.

24. L'équation (4) montre évidemment que la surface S_8 est du huitième ordre et admet $\alpha\beta$ comme droite sextuple.

Cette équation peut s'écrire

$$T_8 - \mu U_8 = 0.$$

Donc S_8 appartient à un faisceau dont font partie les systèmes T_8 et U_8; le plan tangent en un point M de S_8 passe donc par l'intersection des plans polaires de M relatifs à T_8 et U_8 et la construction de ces plans polaires se ramène à une série de problèmes du premier et du second degré.

Les éléments de la courbure de S_8 en un point M dépendent des mêmes éléments de la quadrique polaire du point M relativement à la surface(*). Mais les quadriques polaires d'un point par rapport aux surfaces d'un faisceau forment aussi un faisceau et la quadrique polaire d'un point d'une surface passe par ce point; donc la quadrique polaire de M relative à S_8 est déterminée par M et par l'intersection c_4 de ses quadriques polaires relatives aux systèmes T_8 et U_8(**).

(*) La propriété analogue pour les cubiques planes a été donnée par M. Demoulin, *Sur diverses conséquences du théorème de Newton* (Mém. Acad. roy. de Belgique, t. XLV). Pour le théorème général relatif aux courbes et surfaces, voir Servais, *Sur la courbure des polaires* (Bullet. id., 1891), Stuyvaert, *Sur la courbure des lignes et des surfaces* (Mém. id., 1897).

(**) Comparer Stuyvaert, *Problèmes de construction* (*Mathesis*, 1899).

Donc, *les éléments de la courbure de* S_8 *dépendent d'une intersection de quadriques.*

Les tangentes inflexionnelles de S_8 en M sont les génératrices rectilignes de sa quadrique polaire, donc aussi les bisécantes de c_4 issues de M.

25. On a vu, au début de ce chapitre, une construction géométrique donnant une représentation de S_8 sur un plan. Dans la suite on a calculé les coordonnées d'un point de S_8 en fonction de deux paramètres ω et λ, ce qui fournit encore une représentation, mais différente de la première. Nous reprenons à présent cette seconde représentation.

La correspondance entre les x et λ, ω se présentait sous la forme de trois relations linéaires en x; les deux premières étaient linéaires en λ et cubiques en ω, la troisième $(\alpha_x + \omega\beta_x = 0)$ était linéaire en ω et indépendante de λ. Nous avons dit que l'on pouvait en tirer des valeurs des x proportionnelles à des fonctions du neuvième ordre, contenant λ au carré et ω à la septième puissance, ce que nous indiquons par la notation conventionnelle

$$\rho x_i = f_i(\omega^7, \lambda^2).$$

Pour rendre ces fonctions homogènes, on peut poser par exemple

$$\omega = \frac{\mu_1}{\mu_3}, \quad \lambda = \frac{\mu_2}{\mu_3}$$

et les fonctions f seront du neuvième ordre, tout en ne renfermant μ_2 qu'à la seconde puissance et μ_1 qu'à la septième. Si μ_1, μ_2, μ_3 sont les coordonnées homogènes d'un point d'un plan π, les courbes *fondamentales* $\Sigma h_i f_i$, c'est-à-dire les courbes images des sections planes de S_8, ont un point septuple commun au sommet $\mu_1 = \mu_3 = 0$ du triangle de référence et un point double au sommet $\mu_2 = \mu_3 = 0$.

Le point septuple correspond à la directrice 1 ou $\gamma\delta$, car $\mu_1 = \mu_3 = 0$ rend λ infini et ω indéterminé; or, si λ est infini, les égalités (1) montrent que $k = k_1$ et $l = l_1$ et que le point M coïncide avec C. Le point double correspond à la conique génératrice du plan β_x, car, pour $\mu_2 = \mu_3 = 0$, λ est indéterminé et ω ou $-\alpha_x : \beta_x$ infini.

Aux droites du plan π passant par le point septuple correspondent les coniques génératrices, sauf pour la droite $\mu_3 = 0$ qui répond au seul point où $\gamma\delta$ perce le plan β_x. Aux droites du plan π passant par le point double répondent, en général, les courbes c_7, lieux des points M

correspondant à une même valeur de λ; il y a exception pour la droite $\mu_1 = 0$ déjà citée et pour les droites $\mu_2 = 0$ et $\mu_2 = \mu_3$ qui correspondent aux valeurs 0 et 1 du rapport anharmonique λ et, par suite, aux directrices $\gamma'\delta'$ et $\gamma''\delta''$ de S_8.

En général, quand, sur le plan π, les courbes fondamentales sont du neuvième ordre, la surface représentée est du 81e; mais l'existence du point septuple et du point double communs, comptant pour $49 + 4 = 53$ intersections, réduit ce degré à 28; or, nous savons que la surface représentée est du huitième ordre; donc les courbes fondamentales ont encore vingt points R communs, répondant à vingt droites de S_8; de plus, les droites joignant ces points R au point septuple répondent à vingt autres droites de S_8; les quarante droites ainsi trouvées constituent les vingt coniques dégénérées $(i + j)$ dont il a déjà été parlé.

Si les courbes fondamentales f n'ont pas, en général, d'autres points singuliers que leurs points double et septuple, le genre de ces courbes est

$$28 - 21 - 1 = 6,$$

puisque le point septuple compte pour 21 points doubles. Les sections planes de S_8 sont du même genre et, en effet, si S_8 n'a pas d'autre ligne multiple que l'axe $\alpha\beta$, les sections planes du huitième ordre n'ont qu'un point sextuple sur $\alpha\beta$ et leur genre est

$$21 - 15 = 6.$$

Mais il est évident, d'après la génération de S_8, que cette surface n'a pas d'autre ligne singulière que $\alpha\beta$, sinon les coniques génératrices auraient toutes un point singulier sur cette ligne; or, il n'y a que vingt coniques génératrices à point double.

26. Par quoi sera représentée, sur le plan π, la droite $\alpha\beta$ sextuple sur S_8?

Appelons A_2 le point double, B_7 le point septuple des courbes f sur le plan π. Une conique génératrice répondant à la valeur ω_1 de ω contient deux points P_1 et P_2 de $\alpha\beta$, pour lesquels λ prend des valeurs λ_1, λ_2; les points p_1, p_2, images de P_1, P_2 sont à l'intersection d'une droite $B_7p_1p_2$ ayant pour équation $\mu_1 = \omega_1\mu_3$ avec deux droites A_2p_1, A_2p_2 ayant pour équations $\mu_2 = \lambda_1\mu_3$ et $\mu_2 = \lambda_2\mu_3$. Les deux faisceaux (B_7), (A_2) sont tels qu'à un rayon du premier répondent deux rayons du second, et ils engendrent une courbe, image de $\alpha\beta$; mais un rayon A_2p de (A_2) repré-

sente une courbe c_7 de la surface et celle-ci a six points sur $\alpha\beta$, c'est-à-dire qu'un rayon du faisceau (A_2) répond à six rayons du faisceau (B_7); ces deux faisceaux engendrent donc une courbe du huitième degré Γ_8. Elle passe évidemment par les vingt points fondamentaux simples R, puisque ceux-ci représentent des droites qui rencontrent $\alpha\beta$.

L'axe $\alpha\beta$ *a pour image, sur le plan* π, *une courbe du huitième ordre ayant un point double en* A_2, *un point sextuple en* B_7 *et passant par les vingt points* R.

Comme vérification, remarquons qu'une courbe du 8ᵉ ordre de π représente, en général, sur S_8, une courbe d'ordre 8×9; mais comme Γ_8 passe six fois par le point septuple, deux fois par le point double et une fois par 20 points simples, il y a, de ce chef, une réduction totale de $6 \times 7 + 2 \times 2 + 20 = 66$ et la courbe représentée est du degré $72 - 66 = 6$, ce qui correspond à l'ordre de multiplicité de $\alpha\beta$.

27. De même, quelle est l'image des directrices 4 et 5 ?

Les points fondamentaux R représentent des droites de S_8 dont tous les points correspondent à la même valeur du rapport anharmonique λ, ce qui peut arriver, 1° pour les trois couples de droites i et le couple de droites j rencontrant 4 et 5, 2° pour les trois couples de droites j rencontrant 4 et les trois couples de droites j rencontrant 5. Les directrices 4 et 5 jouent des rôles identiques dans toute la théorie; leurs courbes images sont donc du même degré x. Ces courbes admettent, pour points communs simples, le point A_2 (car la conique représentée par A_2 rencontre 4 et 5) et les huit points R représentant des droites i et j qui rencontrent à la fois 4 et 5. Chacune passe encore par six autres points R, et rencontre une seule fois un rayon mené par B_7 et représentant une conique génératrice, de sorte que B_7 est un point $(x-1)^{ple}$ pour ces deux courbes. Enfin, comme 4 et 5 ne se rencontrent pas, leurs courbes images ne peuvent se couper qu'en des points fondamentaux, donc on a

$$(x-1)^2 + 9 = x^2,$$

d'où $x = 5$.

Chacune des directrices 4 *et* 5 *est représentée, sur le plan* π, *par une courbe* Γ_5 *du cinquième ordre, ayant* B_7 *pour point quadruple,* A_2 *pour point simple et passant par* 14 *points* R.

28. Pour vérifier le résultat précédent, cherchons l'ordre de la courbe représentée par Γ_5; les courbes fondamentales étant du 9ᵉ degré,

une courbe du 5e ordre représente, en général, une ligne du 45e ordre; mais Γ_8 ayant un point quadruple au point septuple des courbes f, un point simple au point double des f et passant encore une fois par 14 points R, il y a, de ce chef, une réduction totale de $4 \times 7 + 2 \times 1 + 14 = 44$ unités et Γ_5 représente une ligne d'ordre $45 - 44 = 1$.

Voici une autre vérification : la directrice 4 ne rencontrant pas $\alpha\beta$, les courbes Γ_5 et Γ_8 ne peuvent se couper qu'en des points fondamentaux, et l'on a effectivement

$$5 \times 8 = 6 \times 4 + 2 \times 1 + 14.$$

La connaissance des courbes Γ_8 images des directrices 4 et 5 nous fournit une conséquence curieuse.

Un rayon par A_2 coupe, en général, en quatre points (non fondamentaux), la courbe Γ_8. Donc toutes les courbes c_7 de la surface S_8 admettent les directrices 4 et 5 comme quadrisécantes.

Par suite, il y a quatre coniques dont le plan passe par $\alpha\beta$ et qui reposent sur les directrices 1, 2, 3, 4, 5, de telle façon que le rapport anharmonique de leurs points d'appui sur 1, 2, 3, 4 soit égal à un nombre donné. Or, si l'on regarde 5 comme une droite quelconque de l'espace, on a donc ce théorème :

Les coniques dont le plan passe par $\alpha\beta$ et qui rencontrent quatre directrices rectilignes en des points dont le rapport anharmonique est donné engendrent une surface du quatrième ordre ayant $\alpha\beta$ comme droite double (*).

29. Par le point sextuple d'une section plane de S_8, on peut mener, en général, 14 tangentes t à cette courbe, ayant leur contact D ailleurs qu'au point singulier; le plan mené par t et $\alpha\beta$ contient une conique génératrice c_2 ayant deux points coïncidents en D, donc tangente au plan ξ de la section considérée, à moins que D ne soit un point double de c_2. Réciproquement, si c_2 touche ξ en D, sa tangente t en D rencontre la section plane de S_8 par ξ en deux points coïncidents en D; donc t est tangente à cette section plane.

Ainsi, *tout plan qui ne passe pas par un des vingt points* (ŋ) *est tangent à quatorze coniques génératrices.*

(*) Ceci est un commencement de solution d'une question que nous a posée M. Servais.

En particulier, *si aucune droite* i *n'est parallèle à la droite* j *correspondante, il y a quatorze paraboles parmi les coniques génératrices de* S_8.

Il en résulte aussi que les tangentes à S_8 issues d'un point P de $\alpha\beta$ forment un cône du 14e ordre, puisque tout plan mené par P contient quatorze de ces tangentes ; la droite $\alpha\beta$ est multiple d'ordre 12 sur ce cône, puisque tout plan mené par $\alpha\beta$ ne contient, outre $\alpha\beta$, que deux tangentes de P à S_8.

On peut conjecturer par là qu'il doit y avoir douze coniques génératrices de S_8 tangentes à $\alpha\beta$. La conjecture est vérifiée par ce fait que, sur le plan π, la courbe Γ_8, image de $\alpha\beta$, qui a un point sextuple en B_7 et un point double en A_2 a douze tangentes issues de B_7 et ces douze tangentes représentent autant de coniques génératrices tangentes à $\alpha\beta$.

Si donc on imagine un système de coniques reposant sur quatre droites 1, 2, 3, 4 et touchant une cinquième droite $\alpha\beta$, on obtient une surface qui est rencontrée douze fois par une droite 5 quelconque ; un plan par $\alpha\beta$ coupe cette surface suivant l'axe $\alpha\beta$ et deux coniques génératrices. On a donc ce théorème :

La surface engendrée par une conique s'appuyant sur quatre droites et en touchant une cinquième est du douzième ordre et admet la cinquième droite comme ligne multiple d'ordre 8.

30. Les nombres caractéristiques trouvés au n° précédent, pour S_8, se vérifient encore si l'on applique, à cette surface, la théorie générale des singularités, théorie exposée par SALMON et, pour le cas d'une droite multiple, par ZEUTHEN (*).

Mais, avant d'utiliser les formules de ces auteurs, il faut voir si S_8 n'a pas d'autres singularités ponctuelles que sa droite sextuple. Les seuls points pour lesquels il peut y avoir doute sont les points doubles des coniques dégénérées $(i + j)$.

Soit E le point commun à une droite i qui s'appuie sur $\alpha\beta$, 1, 3, 4 et à la droite correspondante j qui passe par les traces de 2 et 5 sur le plan $(\alpha\beta, i)$. Remontons à l'équation (4),

$$\frac{T_8}{U_8} = \frac{[(\alpha\beta)(1, 3, 4)]\,[(\alpha\beta)(2, 3, 5)]\,(\alpha\beta, 2, 4)\,(\alpha\beta, 1. 5)}{[(\alpha\beta)(2, 3, 4)]\,[(\alpha\beta)(1, 3, 5)]\,(\alpha\beta, 1, 4)\,(\alpha\beta, 2, 5)} = \text{constante.}$$

(*) SALMON, *Traité de géométrie analytique à 3 dimensions*, IIIe partie. — ZEUTHEN, *Recherche des singularités qui ont rapport à une droite multiple d'une surface* (Math. Ann., t. IV).

Le point E est sur un des plans $[(\alpha\beta)\ (1, 3, 4)]$; mais comme il n'annule, généralement, aucun autre facteur du numérateur, E est un point simple de la surface T_8. Or, E se trouve sur les deux hyperboloïdes $(\alpha\beta, 1, 4)$, $(\alpha\beta, 2, 5)$; c'est donc un point double de U_8. Si donc E avait pour coordonnées $x_2 = x_3 = x_4 = 0$, le terme en x_1^8 manquerait dans T_8, mais non le terme en x_1^7; au contraire, dans U_8, les termes en x_1^8 et x_1^7 seraient nuls; donc, à moins que la constante du second membre ne soit infinie, ce qui n'a pas lieu en général, les termes en x_1^7 ne se détruiraient pas et E est un point simple de S_8.

Ainsi la surface S_8 a sa droite sextuple comme seule singularité. Or, les formules de SALMON et ZEUTHEN, trop longues à reproduire ici, donnent, pour une surface du huitième ordre à droite sextuple, les résultats suivants :

La surface est de classe 52; *une section plane quelconque est de classe* 26 *et a* 240 *tangentes doubles et* 54 *inflexions; un cône circonscrit quelconque est de l'ordre* 26 *et a* 200 *génératrices doubles et* 66 *génératrices cuspidales; un cône ayant son sommet sur* $\alpha\beta$ *se compose de cet axe compté deux fois et d'un cône résidu de l'ordre* 14, *de la classe* 50, *ayant* $\alpha\beta$ *comme arête* 12^{ple}; *il y a vingt points sur* $\alpha\beta$ *tels que deux des coniques génératrices qui y passent coïncident, etc.*

31. M. WEYR, dans le mémoire cité précédemment, considère la surface la plus générale engendrée par des coniques. Il établit géométriquement que la développable circonscrite à cette surface le long d'une conique génératrice est de classe 4, 3 ou 2, suivant que deux coniques génératrices consécutives ont 0, 1 ou 2 points communs. La fin de son travail contient une démonstration analytique de ce théorème qui constitue une généralisation élégante de la propriété des plans tangents le long d'une génératrice d'une surface réglée. Dans cette démonstration analytique, la conique est représentée par deux équations en coordonnées-points ou par une équation tangentielle à discriminant nul. Le mémoire de M. WEYR contient en outre un grand nombre de propriétés et de constructions intéressantes.

Avant d'avoir lu ce travail, nous avions établi le théorème auquel il vient d'être fait allusion et nous allons consigner ici notre raisonnement, parce qu'il s'applique à toutes les surfaces représentables sur un plan, quand les courbes fondamentales d'orde n ont en commun un point multiple d'ordre $n - 2$ plus un point double.

Nous avons représenté la surface S_8 par les équations

$$\rho x_i = f_i(\omega^7, \lambda^2).$$

Un point x', infiniment voisin de x sur la conique génératrice c_2 a pour coordonnées

$$\rho' x'_i = f_i[\omega^7, (\lambda + d\lambda)^2] = \rho x_i + d\lambda \frac{df_i}{d\lambda} + \cdots$$

Un point x'', infiniment voisin de x sur la courbe c_7 a pour coordonnées

$$\rho'' x''_i = f_i[(\omega + d\omega)^7, \lambda^2] = \rho x_i + d\omega \frac{df_i}{d\omega} + \cdots$$

En faisant abstraction des infiniment petits d'ordre supérieur au premier, on a des points voisins de x sur les tangentes à c_2 et à c_7, et le plan de ces trois points, ou le plan tangent en x à S_8 a pour équation, les coordonnées courantes étant X_i,

$$\begin{vmatrix} X & f & \frac{df}{d\lambda} & \frac{df}{d\omega} \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore

$$\begin{vmatrix} X & 2f - \lambda\frac{df}{d\lambda} & \frac{df}{d\lambda} & \frac{df}{d\omega} \end{vmatrix} = 0.$$

Les termes des deuxième, troisième, quatrième colonne de ce déterminant sont respectivement de degré 1, 1 et 2 en λ. Si l'on regarde ω comme constant et λ comme variable, l'équation du plan tangent en un point mobile M de la conique génératrice c_2 est fonction du quatrième degré de λ et ce plan enveloppe une développable de quatrième classe.

Par tout point X de l'espace, on peut mener quatre plans tangents à cette développable ; ceux-ci contiendront chacun une tangente à c_2 et toucheront donc le cône de sommet X et de base c_2.

Ainsi *tout cône du second ordre et par suite aussi toute quadrique passant par une conique génératrice de S_8 touche la surface en quatre points de cette conique.*

Cette propriété est une extension d'un théorème relatif aux surfaces réglées : tout plan mené par une génératrice rectiligne touche la surface en un point.

La démonstration qui précède montre aussi que la développable circonscrite est unicursale. De plus, si dans la dernière équation, on regarde les X_i comme quatre paramètres arbitraires homogènes, on a

l'équation d'une involution I_3^1. Il était d'ailleurs évident géométriquement que les groupes de quatre points de c_2 dont les plans tangents concourent forment une telle involution, puisque trois points quelconques déterminent un point X commun à leurs plans tangents et, par suite, un quatrième point complétant le groupe. Remarquons enfin que cette involution a quatre groupes de quatre points coïncidents.

32. Dans l'étude de la surface S_8, nous avons supposé que les directrices et l'axe étaient des droites indépendantes.

Admettons maintenant qu'il n'en soit plus ainsi et voyons d'abord ce qui arrive quand il y a des points communs à deux des directrices. D'après le Chapitre I, chacun de ces points communs réduit, en général, d'une unité, l'ordre de la surface.

Pour le vérifier, rappelons l'équation de S_8 :

$$\frac{T_8}{U_8} = \frac{[(\alpha\beta)(1, 3, 4)][(\alpha\beta)(2, 3, 5)](\alpha\beta, 2, 4)(\alpha\beta, 1, 5)}{[(\alpha\beta)(2, 3, 4)][(\alpha\beta)(1, 3, 5)](\alpha\beta, 1, 4)(\alpha\beta, 2, 5)} = \text{constante}.$$

Si les directrices 1 et 3 ont un point commun P, le plan $(\alpha\beta, P)$ est à la fois un des plans $(\alpha\beta)(1, 3, 4)$ et un des plans $(\alpha\beta)(1, 3, 5)$; les deux termes de la fraction ci-dessus ont donc un facteur linéaire commun et la surface S_8 se décompose en un plan $(\alpha\beta, P)$ et une surface du septième ordre. Si les directrices 2 et 4 ont un point commun Q, la quadrique $(\alpha\beta, 2, 4)$ dégénère en deux plans dont l'un est $(\alpha\beta, Q)$ et celui-ci est aussi un des plans $(\alpha\beta)(2, 3, 4)$, donc il y a encore un facteur $(\alpha\beta, Q)$ commun aux deux termes de la fraction, etc.

Cependant il y a une exception curieuse : si trois directrices 1, 2, 3, sont dans un même plan τ, toutes les coniques génératrices se décomposent en deux droites dont l'une décrit le système réglé $(\alpha\beta, 4, 5)$ et l'autre le plan τ.

Les cas des points communs à deux directrices ne sont pas les seuls à considérer; lorsque quatre directrices 1, 2, 3, 4 sont des rayons d'un même système réglé, les plans $(\alpha\beta)(1, 3, 4)$ se confondent avec les plans $(\alpha\beta)(1, 2, 4)$ et l'équation précédente indique, de ce chef, une réduction de deux unités dans l'ordre de la surface; si les cinq directrices sont des rayons d'un même système réglé, il est évident que la surface se confond avec la quadrique support de ce système.

Il se peut aussi que l'axe $\alpha\beta$ ne soit pas indépendant des directrices; nous remettons à plus tard l'examen du cas où cet axe rencontre une

des directrices; mais nous pouvons constater ici que, si l'axe et trois directrices 1, 2, 4 sont des rayons d'un même système réglé, les quadriques ($\alpha\beta$, 2, 4) et ($\alpha\beta$, 1, 4) sont identiques, ainsi que les couples de plans ($\alpha\beta$) (2, 3, 4) et ($\alpha\beta$) (1, 3, 4), ce qui donne une réduction de quatre unités au moins; et si l'axe est situé, avec les cinq directrices (sans points communs) sur une même surface cubique, la surface S_8 se réduit évidemment à cette surface cubique.

33. Puisque nous avons rencontré la surface générale du troisième ordre comme cas particulier de la surface S_8, nous pouvons esquisser une représentation plane de la surface cubique qui soit une application de la méthode que nous avons exposée(*).

Prenons, sur la surface cubique Σ_3, six droites sans points communs, $\alpha\beta$, 1, 2, 3, 4, 5. La surface est décrite par la conique reposant sur 1, 2, 3, 4, 5 et dont le plan $\alpha_x + \omega\beta_x = 0$ tourne autour de $\alpha\beta$. Un point M de Σ_3 est déterminé par le paramètre ω et le rapport anharmonique λ de M et des points d'appui de la conique génératrice sur 1, 2, 3. Posons, comme précédemment,

$$\omega = \frac{\mu_1}{\mu_3}, \quad \lambda = \frac{\mu_2}{\mu_3}.$$

Sur le plan π, les courbes fondamentales d'ordre x auront un point $(x-2)^{ple}$ en B ($\mu_1 = \mu_3 = 0$), puisque les droites menées par ce point doivent représenter les coniques génératrices c_2. Le point A ($\mu_2 = \mu_3 = 0$) représente la conique β_x et comme celle-ci coupe deux fois toutes les sections planes de Σ_3, A doit être un point double des courbes fondamentales. Les sections planes sont de genre 1; il doit en être de même des courbes fondamentales; or, celles-ci ont un point double et un point $(x-2)^{ple}$, donc

$$\tfrac{1}{2}(x-1)(x-2) - \tfrac{1}{2}(x-2)(x-3) - 1 = 1,$$

d'où $x = 4$. Ainsi les courbes fondamentales sont du quatrième degré à deux points doubles ; l'ordre de la surface représentée est, y étant le nombre des points fondamentaux simples R,

$$4 \times 4 - 2 \times 2 - 2 \times 2 - y = 3,$$

d'où $y = 5$. Donc il y a cinq coniques c_2 dégénérées, ou la droite $\alpha\beta$ est rencontrée par 10 des 27 droites de Σ_3, ce qui est connu.

(*) Cette idée nous est suggérée par M. Servais.

Les courbes fondamentales peuvent dégénérer, de deux manières, en une cubique et une droite : d'abord, la droite peut passer par B et représenter une conique c_2, tandis que la cubique passera par les cinq points R et par B et aura A pour point double; cette cubique représente donc $\alpha\beta$; — ou bien la droite peut passer par A et représenter une conique γ_2 lieu des points M de même rapport anharmonique sur les coniques c_2; la cubique a alors B pour point double, A et les R pour points simples et elle représente une droite de Σ_8, autre que $\alpha\beta$, 1, 2, 3, 4, 5 et ne rencontrant pas $\alpha\beta$; cette droite est dans le plan de toutes les coniques γ_2.

Ainsi, *les coniques d'une surface du troisième ordre situées dans un faisceau de plans rencontrent trois droites de la surface en des ternes de points. Le lieu d'un point* M *de ces coniques formant, avec ce terne, un rapport anharmonique constant est une autre conique dont le plan passe par une droite fixe de la surface.*

Nous ne poursuivrons pas ici cette étude qui nous entraînerait hors de notre sujet.

34. Nous avons vu que la surface S_8 la plus générale comprend quatorze coniques génératrices tangentes à un plan donné ξ, pourvu que ce plan ne passe pas par un point double d'une conique génératrice. Donc les coniques dont le plan passe par $\alpha\beta$, qui s'appuient sur quatre droites 1, 2, 3, 4 et qui touchent un plan ξ engendrent une surface S_{14}, du 14ᵉ ordre (puisqu'elle rencontre, en 14 points, une droite quelconque 5). Tout plan par $\alpha\beta$ contient deux coniques génératrices, de sorte que $\alpha\beta$ est une droite décuple de S_{14}. D'après sa définition, cette surface touche le plan ξ en tous les points où elle le rencontre et le lieu des contacts est une courbe du septième ordre à point quintuple sur $\alpha\beta$. Ce fait peut encore être vérifié par d'autres moyens; ainsi, toute droite menée dans le plan ξ et rencontrant $\alpha\beta$ détermine un plan passant par $\alpha\beta$, touche deux coniques génératrices et contient donc deux couples de points coïncidents de S_{14}; ou encore, la surface S_8 étudiée précédemment touche sur la directrice 5, un plan η mené par cette droite, en sept points, car ce plan η coupe S_8 suivant la droite 5, plus une courbe du septième ordre.

Les coniques dont le plan passe par un axe, qui s'appuient sur quatre droites et qui touchent un plan engendrent une surface du 14ᵉ *ordre ayant*

l'axe pour droite décuple et touchant le plan donné le long d'une courbe du septième ordre.

35. Appliquons le théorème du n° 17, au cas de quatre directrices rectilignes 1, 2, 3, 4, plus une conique g_2 rencontrée une fois par chaque conique génératrice c_2 ; nous obtenons une surface S_{16} du seizième ordre ayant $\alpha\beta$ pour droite 12^{ple}.

Soit η le plan de la conique g_2 et O le point où il coupe $\alpha\beta$. Menons, par O, dans le plan η, une droite quelconque coupant g_2 en A et B. Les coniques génératrices déterminées par A et B coupent encore AB, respectivement en A′ et B′ et ces derniers points décrivent, dans le plan η, une courbe ou un système d'ordre $16 - 2 = 14$, coupant g_2 en 28 points. Ceux-ci répondent à des coïncidences de A ou B avec A′ ou B′. Or, les coïncidences de points A et A′ (ou B et B′) appartiennent à des coniques c_2 touchant η ; d'après le n° précédent, ces courbes marquent, sur η, une ligne du septième ordre rencontrant g_2 en 14 points. Restent 14 coïncidences de points A avec B′ ou B avec A′; mais si A se confond avec B′, les deux coniques c_2 situées dans le plan ($\alpha\beta$, AB) se confondent et B coïncide avec A′; donc les 14 coïncidences de points A et B′ ou B et A′ sont, deux à deux, sur sept droites issues de O. Ainsi S_{16}, outre sa droite 12^{ple}, a 7 coniques doubles; à la vérité, elle a encore deux autres coniques doubles, pour les coïncidences de points A et B, ou pour les tangentes de g_2 issues de O, mais ces deux dernières coniques sont étrangères à ce qui va suivre, parce qu'elles ne répondent pas à des points doubles de la section de S_{16} par le plan η.

D'après cela, il y a sept coniques c_2 qui rencontrent une fois chacune des directrices 1, 2, 3, deux fois la courbe g_2 et qui rencontrent une droite quelconque 4. Donc on peut énoncer le résultat suivant, conforme au n° 12.

Les coniques dont le plan passe par un axe $\alpha\beta$, qui coupent deux fois une conique donnée et s'appuient sur trois droites données engendrent une surface du septième ordre ayant $\alpha\beta$ comme droite quintuple.

36. La surface S_7 définie ci-dessus peut-être traitée par une méthode analogue à celle du n° 20. Pour plus de clarté, nous choisirons d'abord un tétraèdre de référence spécial : l'arête $x_1 = x_3 = 0$ sera l'axe $\alpha\beta$, α_x et β_x seront remplacés par x_1 et x_3 ; nous supposerons que ces deux plans touchent la conique directrice g_2 située dans la face $x_4 = 0$; enfin

la face x_2 passera par les points de contact de g_2 avec x_1 et x_3. La conique g_2 peut alors être représentée par les équations

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \theta^2 : \theta : 1 : 0.$$

Un plan $x_1 = \omega x_3$ passant par l'axe coupe g_2 en deux points N_1 et N_2 dont les paramètres sont respectivement $+\sqrt{\omega}$ et $-\sqrt{\omega}$. Joignons ces points au sommet A ($x_1 = x_2 = x_4 = 0$) du tétraèdre et utilisons ces deux droites (variables avec ω) comme nous avons (n° 20) utilisé les directrices 4 et 5. Nous avions trouvé une équation

$$(\varepsilon\gamma\delta\alpha) + k_1(\varphi\gamma\delta\alpha) + \omega(\varepsilon\gamma\delta\beta) + k_1\omega(\varphi\gamma\delta\beta) = 0$$

qui se transforme à présent de la manière suivante : ε_x et φ_x deviennent $x_4 = 0$ et $x_1 = +\sqrt{\omega}\, x_2$; le déterminant $(\varphi\gamma\delta\alpha)$ se réduit donc à

$$\begin{vmatrix} 1 & \gamma_1 & \delta_1 & 1 \\ -\sqrt{\omega} & \gamma_2 & \delta_2 & 0 \\ 0 & \gamma_3 & \delta_3 & 0 \\ 0 & \gamma_4 & \delta_4 & 0 \end{vmatrix} = +\sqrt{\omega} \begin{vmatrix} \gamma_3 & \delta_3 \\ \gamma_4 & \delta_4 \end{vmatrix} = +\sqrt{\omega}\, q_{34},$$

q_{ij} représentant les coordonnées pluckériennes de la directrice $\gamma\delta$ ou 1. On trouve de même

$$(\varepsilon\gamma\delta\alpha) = -q_{23}, \quad (\varepsilon\gamma\delta\beta) = q_{12}, \quad (\varphi\gamma\delta\beta) = q_{42} - \sqrt{\omega} q_{14}.$$

Par suite, k_1 est le quotient de deux fonctions de ω, la première est rationnelle et linéaire en ω, la seconde, $(\varphi\gamma\delta\alpha) + \omega(\varphi\gamma\delta\beta)$ est le produit de $\sqrt{\omega}$ par un polynôme complet, du second degré en $\sqrt{\omega}$; donc $k_1\sqrt{\omega}$, $k_2\sqrt{\omega}$, $k_3\sqrt{\omega}$ sont des rapports de fonctions quadratiques de $\sqrt{\omega}$;

$$k_i = \frac{f_i}{\sqrt{\omega}\, F_i} \quad (i = 1, 2, 3).$$

L'une des équations (1) du n° 20 devient

$$\left(\frac{f_1}{\sqrt{\omega}\, F_1} - \frac{f_3}{\sqrt{\omega}\, F_3}\right)\left(\frac{f_2}{\sqrt{\omega}\, F_2} - \frac{x_4}{x_1 - \sqrt{\omega}\, x_2}\right)$$
$$= \lambda\left(\frac{f_2}{\sqrt{\omega}\, F_2} - \frac{f_3}{\sqrt{\omega}\, F_3}\right)\left(\frac{f_1}{\sqrt{\omega}\, F_1} - \frac{x_4}{x_1 - \sqrt{\omega}\, x_2}\right),$$

ou encore, en remplaçant x_1 par ωx_3,

(5) $$(f_1F_3 - f_3F_1)(f_2\omega\, x_3 - f_2\sqrt{\omega}\, x_2 - x_4\sqrt{\omega}\, F_2)$$
$$= \lambda(f_2F_3 - f_3F_2)(f_1\omega\, x_3 - f_1\sqrt{\omega}\, x_2 - x_4\sqrt{\omega}\, F_1).$$

La seconde équation ne diffère de celle-ci que par la substitution de $+\sqrt{\omega}$ à $-\sqrt{\omega}$, car les droites AN_1 et AN_2 ne diffèrent que par le signe de ce radical. Au reste, les deux équations peuvent d'abord être débarassées du facteur $\sqrt{\omega}$ et alors elles sont linéaires en x_2, x_3, x_4, linéaires en λ et du septième ordre en $\sqrt{\omega}$.

Par addition, les termes en $(\sqrt{\omega})^{2i+1}$ disparaissent, et on a une relation rationnelle et cubique en ω; par soustraction, les termes en $(\sqrt{\omega})^{2i}$ disparaissent et l'on peut diviser par $\sqrt{\omega}$, ce qui donne encore une relation rationnelle et cubique en ω ; même les termes en x_2 ne contiendront ω qu'à la deuxième puissance. De ces deux égalités, on peut tirer x_2 en fonction de λ^2 et ω^6, x_3 et x_4 en fonction de λ^2 et ω^5 et comme $x_1 = \omega x_5$, x_1 sera fonction de λ^2 et ω^6.

Ainsi l'on aura une représentation plane de S_7 et les courbes fondamentales, du 8ᵉ ordre, auront en commun un point sextuple, un point double et 17 points simples correspondant à 17 coniques dégénérées.

Cette représentation de S_7 pourrait donner lieu à des développements analogues à ceux que nous avons donnés pour la surface S_8. Nous ne les exposons pas pour ne pas nous répéter.

Nous ne donnons pas non plus l'équation de S_7, parce que le calcul est trop long. Il suffira de l'indiquer ; l'équation (5) débarassée du facteur $\sqrt{\omega}$ peut s'écrire

$$U + \sqrt{\omega}\,V = \lambda\,(U' + \sqrt{\omega}\,V');$$

l'équation analogue est

$$U - \sqrt{\omega}\,V = \lambda\,(U' - \sqrt{\omega}\,V');$$

on en déduit

$$UV' = U'V,$$

qui est entière et rationnelle en ω et où il suffit de remplacer ω par $x_1 : x_5$ pour avoir la relation cherchée.

27. Nous avons dit, en parlant de la surface S_8 à cinq directrices rectilignes, qu'il fallait réserver le cas où l'axe $\alpha\beta$ rencontre une des directrices, la droite 5 par exemple, en un point O. Le problème est alors le suivant : trouver la surface engendrée par une conique qui passe par un point fixe O, qui s'appuie sur quatre directrices rectilignes et dont le plan passe par un axe fixe $\alpha\beta$, mené évidemment du point O.

La méthode employée pour trouver l'équation de la surface S_8 est

identiquement applicable et le résultat se simplifie comme il suit. La relation (4),

$$\frac{[(\alpha\beta)(1,3,4)]\,[(\alpha\beta)(2,3,5)]\,(\alpha\beta,2,4)\,(\alpha\beta,1,5)}{[(\alpha\beta)(2,3,4)]\,[(\alpha\beta)(1,3,5)]\,(\alpha\beta,1,4)\,(\alpha\beta,2,5)} = \text{constante}$$

représente la surface cherchée; mais le couple de plans $[(\alpha\beta)(2,3,5)]$ se compose du plan $(\alpha\beta, 5)$ et du plan $(\alpha\beta, 0, 2, 3)$ contenant la droite issue de 0 qui s'appuie sur les directrices 2 et 3 ; on a de même

$$[(\alpha\beta)(1,3,5)] = (\alpha\beta,5) \times (\alpha\beta,0,1,3);$$

la quadrique $(\alpha\beta, 1, 5)$ dégénère en deux plans, savoir $(\alpha\beta, 5)$ et $(0, 1)$; de même $(\alpha\beta, 2, 5) = (\alpha\beta, 5) \times (0, 2)$. Les deux termes de la fraction ci-dessus contiennent le facteur $(\alpha\beta, 5)^2$ et, après suppression de ce facteur, il reste une équation du sixième degré

$$\frac{[(\alpha\beta)(1,3,4)]\,(\alpha\beta,0,2,3)\,(\alpha\beta,2,4)\,(0,1)}{[(\alpha\beta)(2,3,4)]\,(\alpha\beta,0,1,3)\,(\alpha\beta,1,4)\,(0,2)} = \text{constante}.$$

Les conséquences que l'on pourrait tirer de cette forme sont analogues à celles que l'on a déduites de l'équation de S_8. Enonçons quelques résultats :

Les coniques passant par un point fixe, s'appuyant sur quatre directrices rectilignes et dont le plan tourne autour d'un axe fixe engendrent une surface du sixième ordre S_6 ayant l'axe comme droite quadruple et le point fixe comme point quintuple. S_6 peut être considérée comme le lieu des points d'égale puissance par rapport à deux systèmes formés chacun d'une quadrique et de quatre plans. Quatorze coniques génératrices dégénèrent en deux droites. Dix coniques sont des paraboles. La développable circonscrite le long d'une génératrice est de troisième classe. Etc.

38. Nous avons rencontré précédemment une surface S_{16} à cinq directrices dont quatre droites et une conique rencontrée une fois par chaque génératrice; si cette conique rencontre l'axe en un point O, la surface S_{16} se décompose en une surface du sixième ordre dont les coniques génératrices passent par O, plus une surface S_{10} engendrée par des courbes c_3 reposant sur les quatre droites et sur la conique directrice en un point autre que O.

Voici encore d'autres figures décrites par des coniques. En partant de la surface S_6 du n° précédent et en appliquant les raisonnements des n°s 17, 33, 34 on trouve les résultats suivants.

Si les coniques passant par un point fixe O de l'axe, rencontrent trois droites et une conique, chacune une fois, la surface est du douzième ordre, avec $\alpha\beta$ comme droite octuple et O comme point décuple. Si elles reposent sur trois droites et touchent un plan, la surface est du dixième ordre avec l'axe pour droite sextuple et O pour point octuple. Si elles reposent sur deux droites et rencontrent deux fois une conique, la surface est du cinquième ordre avec l'axe pour droite triple et O pour point quadruple.

39. Si dans la surface S_8 à cinq directrices rectilignes 1, 2, 3, 4, 5, les directrices 4 et 5 rencontrent l'axe respectivement en O et O′, toutes les coniques génératrices passent par ces deux points. Pourtant la méthode employée pour étudier la surface S_8 peut être appliquée intégralement et le résultat subit deux fois la réduction que nous avons trouvée au n° 37 pour la surface S_6.

Ainsi, *toutes les coniques passant par deux points fixes* O *et* O′ *et s'appuyant sur trois droites* 1, 2, 3, *engendrent une surface du quatrième ordre* S_4 *ayant la droite* OO′ *pour droite double et les points* O *et* O′ *pour points triples*.

L'équation de S_4 est de la forme

$$\frac{(\alpha\beta, O, 2, 3)\,(\alpha\beta, O', 1, 3)\,(O, 1)\,(O', 2)}{(\alpha\beta, O, 1, 3)\,(\alpha\beta, O', 2, 3)\,(O, 2)\,(O', 1)} = \text{constante}.$$

L'application de nos méthodes précédentes à cette surface S_4 fournit encore les propriétés suivantes.

Le lieu d'un point M de S_4 qui forme un rapport anharmonique constant avec les points d'appui de la conique génératrice sur les trois directrices est une cubique gauche c_3 admettant $\alpha\beta$ comme bisécante. Les coniques génératrices marquent, sur ces courbes c_3, des ponctuelles projectives, et inversement. Par chaque point triple de S_4, il passe six droites de la surface, autres que l'axe. Parmi les coniques génératrices, il y a six paraboles, etc.

40. Si deux directrices 2, 3 de la surface S_4 ont un point commun, la surface n'est plus que du troisième ordre (S_3) et a deux points doubles O et O′. Outre la droite OO′, il ne passe plus, par chacun de ces points, que quatre droites de S_3.

La surface cubique la plus générale a 27 droites, mais toute droite passant par un point double compte double et une droite joignant deux points doubles compte quadruple.

La surface cubique à deux points doubles, O et O′, la plus générale a quatre droites par chacun des points O et O′, outre la droite OO′ (n° 16); soient m, n, p trois droites par O; la section de la surface par chacun des plans mn et mp se complète par une droite q, r; les rayons q et r ne se rencontrent pas et ne coupent pas OO′. Les plans menés par q coupent la surface suivant des coniques; de ces coniques, cinq dégénèrent en deux droites, savoir deux coïncidentes à point double en O, deux coïncidentes à point double en O′ et une cinquième $s+t$; une des droites s et t, par exemple s, rencontre OO′ et toutes les droites telles que q et r, car une des coniques du faisceau (OO′) se compose (voir n° 16) de OO′ et de la droite s; donc t ne rencontre ni OO′ ni r, parce que quatre droites de la surface cubique ne peuvent pas être dans un plan.

Ainsi la surface cubique à deux points doubles la plus générale admet trois directrices rectilignes q, r, t, dont deux se coupent.

La surface S_3 que nous rencontrons dans notre étude est donc la surface cubique à deux points doubles la plus générale.

Corollaire. Si l'on prend, par rapport à la surface S_4 du n° précédent, la première polaire d'un point quelconque, on a la surface S_3 ci-dessus.

Pour les surfaces S_4 et S_3, deux coniques génératrices infiniment voisines ont deux points communs; donc la développable circonscrite le long d'une conique génératrice est de seconde classe. Les surfaces S_4 et S_3 sont donc à la fois lieux de coniques et enveloppes de cônes du second ordre. M. Blutel a naturellement rencontré ces deux figures, dans le mémoire que nous avons cité et où il recherche toutes les surfaces susceptibles de cette double génération.

41. En appliquant les résultats des n°s 17, 33, 34 à la surface S_4 du n° 39, on trouve les propriétés suivantes.

Les coniques passant par deux points fixes qui rencontrent, une fois chacune, deux droites et une conique, engendrent une surface du huitième ordre ayant les points fixes pour points sextuples et la droite qui les joint pour droite quadruple. Si elles s'appuient sur deux droites et touchent un plan, la surface est du sixième ordre, avec les points fixes pour points quadruples et l'axe pour droite double. Si elles

rencontrent une fois une droite et deux fois une conique γ_2, la surface est du troisième ordre à deux points doubles.

Dans ce dernier cas, la section par le plan de γ_2 se complète par une droite d; en faisant tourner un plan autour de d, la section résidue sera généralement une conique et exceptionnellement un couple de droites concourantes; en prenant ces droites pour directrices, on est ramené au cas du n° précédent.

La surface cubique obtenue ici est donc encore une fois la surface la plus générale à deux points doubles.

CHAPITRE III.

Sur une gerbe linéaire de cubiques gauches.

42. Appelons *gerbe linéaire de cubiques gauches* un ensemble de lignes du troisième ordre tel que, par tout point de l'espace, il passe une courbe de cet ensemble et une seule.

On connaît un certain nombre de systèmes pareils; leurs caractéristiques ont été étudiées par M. Sturm (*).

Deux de ces systèmes ont fait l'objet d'un examen plus approfondi : l'un, que nous appelons *gerbe de Reye* se compose de toutes les cubiques gauches passant par cinq points (**); l'autre, que nous appellerons *gerbe de Sturm* est l'ensemble des courbes du troisième ordre admettant, de la même manière, un même tétraèdre d'osculation (***).

A l'inverse de ce qui se présente pour les faisceaux de coniques, ces deux systèmes de cubiques gauches ne se déduisent pas l'un de l'autre par spécialisation. Bien plus, ils présentent des différences notables; aussi avons-nous recherché quel est, à défaut de filiation, le lien de parenté de ces deux gerbes. Le résultat de ces recherches sera exposé ci-après et peut se résumer de la manière suivante.

(*) R. Sturm, *Erzeugnisse, Elementarsysteme u. Charakteristiken von cubischen Raumcurven* (Journ. f. Math., t. 79). — id., *Weitere Untersuchungen über cub. Raume.* (id., t. 80). — id., *Ueber höhere Nullsysteme* (Math. Ann., t. 28).

(**) Th. Reye, *Ueber Curvenbündel 3ter Ordnung* (Zeitschr. f. Math. u. Phys., t. 13). — G. Königs, *Sur les cubiques gauches passant par cinq points donnés* (Nouv. Ann. de Math. (3) II). — G. Humbert, *Sur un complexe remarquable de coniques* (Journ. de l'Ec. polyt., LXIV).

(***) R. Sturm, *Ueber Collineationen u. Correlationen, welche*, etc. (Math. Ann., t. 26). — E. Heinrichs, *Ueber den Bündel derjenigen kubischen Raumcurven, welche*, etc. (Diss. Munster, 1887). — K. Döhlemann, *Zur Theorie des Nullsystems* (Jahresber. d. Deutschen Math. Vereinig., t. 3). — M. Stuyvaert, *Notes sur les cubiques gauches* (Bull. de l'Ac. roy. de Belgique, 1900).

Les gerbes de Reye et de Sturm sont des cas particuliers d'une gerbe plus générale G.

Cette circonstance justifie déjà, suivant nous, l'étude simultanée de ces systèmes. Un autre intérêt s'y ajoute ; nous montrerons en effet que *la gerbe* G *est susceptible d'une représentation analytique simple.*

43. Si l'on désigne par a_x, b_x, ..., des formes quaternaires du premier degré, on sait que les équations

$$(1) \qquad \frac{a_x}{b_x} = \frac{a'_x}{b'_x} = \frac{a''_x}{b''_x} = \omega$$

représentent la cubique gauche la plus générale.

Les relations $a_x = 0$, $b_x = 0$, ... représentent des plans que nous désignons respectivement par a, b, ... La courbe définie par les équations (1) passe par le point A commun aux plans a, a', a'', et par le point B commun aux plans b, b', b'' ; elle admet les droites ab, $a'b'$, $a''b''$ comme bisécantes. Par hypothèse, a, a', a'' ne passent pas par une même droite, non plus que b, b', b'' ; et le système réglé défini par ab, $a'b'$, $a''b''$ ne contient ni A, ni B.

Si, dans les relations (1), on multiplie les numérateurs par trois constantes α, α', α'', les nouvelles égalités

$$(2) \qquad \frac{\alpha a_x}{b_x} = \frac{\alpha' a'_x}{b'_x} = \frac{\alpha'' a''_x}{b''_x}$$

représentent une autre cubique gauche.

Ces égalités représentent une gerbe linéaire de cubiques gauches, quand α, α', α'' *sont des paramètres variables.*

En effet, les valeurs de ces paramètres sont déterminés quand on se donne un point x de la courbe.

Réciproquement, toutes les cubiques gauches passant par A et B, et admettant ab, $a'b'$, $a''b''$ comme bisécantes sont comprises dans le système (2), car une quelconque de ces courbes peut-être engendrée par trois faisceaux projectifs de plans, ayant pour axes ab, $a'b'$, $a''b''$; dans ces faisceaux, les plans a, a' a'' doivent se correspondre, ainsi que b, b', b'' ; donc les équations de la projectivité peuvent s'écrire

$$\alpha a_x - \omega b_x = 0, \quad \alpha' a'_x - \omega b'_x = 0, \quad \alpha'' a''_x - \omega b''_x = 0,$$

α, α', α'', étant déterminés par un troisième terne de plans correspondants.

Ce raisonnement revient à dire que trois bisécantes et trois points déterminent une cubique gauche, ce qui est connu; si l'on fait abstraction de l'un des trois points, on a un système doublement infini de courbes constituant ce que nous avons appelé la gerbe G.

La gerbe G est l'ensemble des cubiques gauches ayant en commun trois bisécantes et deux points.

44. Si les plans a, a', b, b', passent par un même point C, les courbes de la gerbe ont en commun trois points et trois bisécantes dont deux passent par un des points donnés.

Si en outre a, a'', b, b'' passent par un même point D, les courbes ont en commun quatre points, plus deux bisécantes passant chacune par un des points donnés.

Si enfin les plans a', a'', b', b'' ont, eux aussi, un point commun E, les cubiques considérées passent par les cinq points A, B, C, D, E et forment la gerbe de Reye.

Ainsi, *la gerbe de Reye est un cas particulier de la gerbe G et est caractérisée par l'évanouissement des invariants*

$$(aba'b'), \quad (aba''b''), \quad (a'b'a''b'').$$

45. D'autre part, si le plan b coïncide avec a' et le plan b' avec a'', on peut effectuer un changement de coordonnées et prendre pour tétraèdre de référence le tétraèdre $aa'a''b''$; les équations (2) deviennent

$$\frac{\alpha x_1}{x_2} = \frac{\alpha' x_2}{x_3} = \frac{\alpha'' x_3}{x_4} = \omega$$

et, pour toutes les valeurs de α, α', α'', elles représentent une cubique gauche osculant le plan x_1, au point $x_1 x_2 x_3$, et y touchant $x_1 x_2$, osculant de même le plan x_4 au point $x_2 x_3 x_4$ et y touchant $x_3 x_4$; en d'autres termes, les cubiques du système admettent, de la même manière, un même tétraèdre d'osculation.

Donc, *la gerbe de Sturm est un cas particulier de la gerbe G et se caractérise par les identités*

$$a'_x \equiv b_x, \quad a''_x \equiv b'_x.$$

Remarquons toutefois que la gerbe G n'est pas la plus générale. On sait, en effet(*) que cinq bisécantes et un point, ou quatre bisécantes

(*) Cremona, *Note sur les cubiques gauches* (Journ. f. Math t. 60).

et deux points, ou une bisécante et cinq points déterminent une courbe du troisième ordre. Par suite, cinq bisécantes, ou quatre bisécantes et un point, ou une bisécante et quatre points déterminent une gerbe de cubiques; ces systèmes doivent être étudiés à part.

46. Nous nous occuperons à présent de la gerbe G et, pour nous conformer au titre du présent travail, nous donnerons une attention spéciale à quelques surfaces qui prennent naissance quand on soumet les courbes c_3 de la gerbe à une condition supplémentaire.

Rattachons d'abord cette étude au chapitre précédent en recherchant les courbes c_3 qui dégénèrent en une droite d et une conique c_2. La courbe c_2 ne peut avoir pour bisécantes deux des droites ab, $a'b'$, $a''b''$, si ces droites sont sans point commun.

Donc, ou bien la conique c_2 admet une des droites ab, $a'b'$, $a''b''$ pour bisécante, ou bien elle les rencontre toutes trois une fois.

Dans le premier cas, la droite d passe par A (ou B) et s'appuie sur deux droites, par exemple $a'b'$, $a''b''$, tandis que c_2 est dans le plan (A, ab) et passe par A, ainsi que par les traces, sur ce plan, des droites $a'b'$, $a''b''$, d; les coniques qui satisfont à ces conditions forment six faisceaux dans les plans menés par A ou B et un des axes ab, $a'b'$, $a''b''$; à ces six faisceaux répondent les six droites issues de A et B et s'appuyant sur deux des axes ab, $a'b'$, $a''b''$.

Dans le second cas, les coniques c_2 passent par A et B et s'appuient sur ab, $a'b'$, $a''b''$; d'après le chapitre II, elles engendrent une surface du quatrième ordre, tandis que les droites d correspondantes décrivent le système réglé admettant ab, $a'b'$, $a''b''$ comme directrices. Chaque conique c_2 coupe la quadrique support de ce système réglé en quatre points dont trois sont sur ab, $a'b'$, $a''b''$; par le quatrième il passe une droite d. Chaque droite d coupe la surface du quatrième ordre en quatre points, dont trois sont sur ab, $a'b'$, $a''b''$; par le quatrième passe une conique c_2.

Ainsi, *les cubiques de la gerbe* G *qui dégénèrent en une droite et une conique forment deux systèmes : le premier comprend des coniques de six faisceaux répondant chacun à une droite unique; le second comprend les coniques génératrices d'une surface du quatrième ordre et les rayons d'un système réglé accouplés un à un.*

Le premier système comprend 18 cubiques dégénérant en trois

droites, puisque tout faisceau de coniques contient trois couples de droites.

Le second système comprend 7 cubiques dégénérant en trois droites, puisque la surface du quatrième ordre a 8 coniques réduites à des couples de droites; deux de ces droites coïncident avec AB, et répondent à une seule et même cubique dégénérée.

Une droite quelconque g de l'espace, sans relation particulière avec les éléments donnés, rencontre six cubiques dégénérées du premier système, sur la conique, car elle perce une fois le plan de chaque faisceau; la droite g perce quatre fois la surface du quatrième ordre et deux fois l'hyperboloïde, donc elle rencontre quatre cubiques dégénérées du second système sur la conique et deux sur la droite.

En résumé, *une droite* g *de l'espace rencontre douze cubiques dégénérées, dont dix sur la conique et deux sur la droite.*

47. Exprimons que la cubique gauche représentée par

$$\frac{\alpha a_x}{b_x} = \frac{\alpha' a'_x}{b'_x} = \frac{\alpha'' a''_x}{b''_x}$$

passe par un point $(x \equiv y + kz)$ d'une droite donnée yz; nous aurons

$$\frac{\alpha a_y + k\alpha a_z}{b_y + kb_z} = \frac{\alpha' a'_y + k\alpha' a'_z}{b'_y + kb'_z} = \frac{\alpha'' a''_y + k\alpha'' a''_z}{b''_y + kb''_z}.$$

Donc la cubique de la gerbe G qui est déterminée par le point $y + kz$, sera représentée par deux équations et ces équations résultent de l'élimination de α, α', α'', entre les quatre égalités précédentes : voici ces résultantes.

$$\frac{b_x(a_y + ka_z)}{a_x(b_y + kb_z)} = \frac{b'_x(a'_y + ka'_z)}{a'_x(b'_y + kb'_z)} = \frac{b''_x(a''_y + ka''_z)}{a''_x(b''_y + kb''_z)}.$$

En éliminant k, on a l'équation de la surface engendrée par toutes les cubiques de la gerbe G qui s'appuient sur la droite yz.

Pour effectuer l'élimination de k, représentons par ω la valeur commune des trois derniers rapports; nous aurons la relation

$$b_x a_y + kb_x a_z - \omega a_x b_y - k\omega a_x b_z = 0$$

et deux autres analogues. Multiplions par $-\omega$, ce qui donne

$$-\omega b_x a_y - k\omega b_x a_z + \omega^2 a_x b_y + k\omega^2 a_x b_z = 0$$

et deux égalités analogues. Entre les six relations, linéaires (et non

homogènes) en k, ω, $k\omega$, ω^2, $k\omega^2$, on peut éliminer ces cinq paramètres et l'on a

$$T_6 \equiv \begin{vmatrix} b_x a_y & b_x a_z & a_x b_y & a_x b_z & & \\ b'_x a'_y & b'_x a'_z & a'_x b'_y & a'_x b'_z & & \\ b''_x a''_y & b''_x a''_z & a''_x b''_y & a''_x b''_z & & \\ & & b_x a_y & b_x a_z & a_x b_y & a_x b_z \\ & & b'_x a'_y & b'_x a'_z & a'_x b'_y & a'_x b'_z \\ & & b''_x a''_y & b''_x a''_z & a''_x b''_y & a''_x b''_z \end{vmatrix} = 0.$$

Ainsi, *les cubiques de la gerbe* G *qui rencontrent une droite donnée engendrent une surface* T_6 *du sixième ordre.*

48. L'application du théorème de Laplace sur les déterminants permet d'écrire l'équation de T_6 sous la forme suivante :

$$T_6 \equiv U_3 V_3 - U'_3 V'_3 \equiv | b_x a_y \quad b_x a_z \quad a_x b_y | \times | b_x a_z \quad a_x b_y \quad a_x b_z |$$
$$- | b_x a_y \quad b_x a_z \quad a_x b_z | \times | b_x a_y \quad a_x b_y \quad a_x b_z | = 0.$$

L'équation de T_6 peut résulter de l'élimination de λ entre les équations de l'un ou l'autre des systèmes ci-après

$$\begin{cases} U_3 = \lambda U'_3, \\ \lambda V_3 = V'_3, \end{cases} \qquad \begin{cases} U_3 = \lambda V'_3, \\ \lambda V_3 = U'_3. \end{cases}$$

Donc, *la surface* T_6 *peut être engendrée, de deux manières, par deux faisceaux projectifs de surfaces cubiques.*

Ou encore, *la surface* T_6 *appartient à un faisceau dont deux surfaces particulières dégénèrent chacune en un couple de surfaces cubiques.*

49. Si une surface est représentée par l'évanouissement d'un déterminant à m lignes et si les coordonnées d'un point annulent les termes de k de ces lignes (ou de k colonnes), ce point est multiple de l'ordre k sur la surface. Prenons, en effet, le point considéré comme sommet ($x_1 = x_2 = x_3 = 0$) du tétraèdre de référence. Dans tout terme d'une ligne du déterminant qui s'annule, le degré en x_1, x_2, x_3 est généralement supérieur, d'une unité, au degré en x_4. Or, chaque terme du déterminant développé contient k facteurs pris dans les lignes qui s'annulent. Donc, dans l'équation de la surface, le plus haut exposant de x_4 est $m - k$.

Appliquons ce résultat : les coordonnées du point A, commun aux plans a, a', a'', annulent deux colonnes de V_3 et V'_3, une colonne de U_3 et U'_3.

Donc, *les points* A *et* B *sont des points triples de la surface* T_6.

De même, tout point commun aux plans a et b annule deux lignes du déterminant à six lignes que nous avons trouvé ci-dessus ; donc tout point de ab est un point double de T_6; le même raisonnement s'applique aux droites $a'b'$, $a''b''$.

Les axes ab, $a'b'$, $a''b''$ *sont des droites doubles de la surface* T_6.

Les six droites issues de A ou B et s'appuyant sur deux des axes ab, $a'b'$, $a''b''$ sont tout entières sur la surface T_6 puisque chacune contient un point triple et deux points doubles. Au surplus ces six droites font partie, comme nous l'avons vu, de six cubiques dégénérées du premier système rencontrant yz. Quant à cette droite yz, elle est évidemment tout entière sur T_6.

Une courbe quelconque c_μ d'ordre μ, sans relation particulière avec les données rencontre T_6 en 6μ points; donc il y a 6μ cubiques de la gerbe s'appuyant à la fois sur la courbe c_μ et sur la droite yz. On a donc les corollaires suivants.

Les cubiques de la gerbe G *qui s'appuient sur une courbe d'ordre* μ *engendrent une surface d'ordre* 6μ.

Il y a six cubiques de la gerbe G *qui rencontrent deux droites données.*

50. Avant de poursuivre l'étude de la surface T_6, déterminons la cubique de la gerbe G qui admet pour bisécante la droite yz; d'après un théorème connu, rappelé plus haut, on doit trouver une solution unique.

La suite proportionnelle

$$\frac{\alpha a_x}{b_x} = \frac{\alpha' a'_x}{b'_x} = \frac{\alpha'' a''_x}{b''_x} = \frac{\Sigma\lambda\alpha a_x}{\Sigma\lambda b_x}$$

montre que les équations

$$\begin{aligned} \lambda\alpha a_x + \lambda'\alpha' a'_x + \lambda''\alpha'' a''_x &= 0, \\ \lambda b_x + \lambda' b'_x + \lambda'' b''_x &= 0, \end{aligned}$$

où λ, λ', λ'' sont trois paramètres arbitraires, représentent les bisécantes de la cubique.

Pour que l'une de ces bisécantes passe par deux points y et z, il faut que l'on ait

$$\begin{aligned} \lambda\alpha a_y + \lambda'\alpha' a'_y + \lambda''\alpha'' a''_y &= 0, \\ \lambda\alpha a_z + \lambda'\alpha' a'_z + \lambda''\alpha'' a''_z &= 0, \\ \lambda b_y + \lambda' b'_y + \lambda'' b''_y &= 0, \\ \lambda b_z + \lambda' b'_z + \lambda'' b''_z &= 0. \end{aligned}$$

Les deux dernières relations donnent

$$\lambda : \lambda' : \lambda'' = | b'_y b''_z | : | b''_y b_z | : | b_y b'_z | ,$$

et les deux premières

$$\lambda\alpha : \lambda'\alpha' : \lambda''\alpha'' = | a'_y a''_z | : | a''_y a_z | : | a_y a'_z | ;$$

d'où, par division,

$$\alpha : \alpha' : \alpha'' = \frac{| a'_y a''_z |}{| b'_y b''_z |} : \frac{| a''_y a_z |}{| b''_y b_z |} : \frac{| a_y a'_z |}{| b_y b'_z |} . (*)$$

Donc, les équations de la cubique cherchée sont

$$\frac{a_x | a'_y a''_z |}{b_x | b'_y b''_z |} = \frac{a'_x | a''_y a_z |}{b'_x | b''_y b_z |} = \frac{a''_x | a_y a'_z |}{b''_x | b_y b'_z |} .$$

Reprenons à présent l'équation

$$T_6 = U_3 V_3 - U'_3 V'_3$$

de la surface engendrée par les cubiques de la gerbe G qui rencontrent yz. Une des fonctions cubiques, par exemple

$$U_3 = | b_x a_y \quad b_x a_z \quad a_x b_y | = b_x b'_x b''_x | a_y \quad a_z \quad \frac{a_x}{b_x} b_y | ,$$

devient, quand on y remplace $\frac{a_x}{b_x}, \frac{a'_x}{b'_x}, \frac{a''_x}{b''_x}$ respectivement par

$$\frac{| b'_y b''_z |}{| a'_y a''_z |}, \frac{| b''_y b_z |}{| a''_y a_z |}, \frac{| b_y b'_z |}{| a_y a'_z |},$$

$$| a'_y a''_z | \cdot | a''_y a_z | \cdot | a_y a'_z | \times U_3 =$$
$$b_x b'_x b''_x | a_y (a'_y a''_z) \quad a_z (a'_y a''_z) \quad b_y (b'_y b''_z) | .$$

Le dernier facteur du second membre est nul, car si l'on ajoute, terme à terme, les trois lignes, on obtient les trois sommes identiquement nulles

$$| a_y a_y a_z | , | a_z a_y a_z | , | b_y b_y b_z | .$$

Ainsi, tout point de la cubique de la gerbe G qui admet yz pour bisécante est situé sur la surface $U_3 = 0$ et l'on vérifie de même que cette cubique appartient aux surfaces U'_3, V_3, V'_3.

La surface T_6 *a pour courbe double la cubique de la gerbe* G *qui admet la droite yz comme bisécante.*

(*) Un cas exceptionnel sera examiné au nº 63.

51. Si nous résumons les singularités de la surface T_6, nous lui trouvons trois droites doubles ab, $a'b'$, $a''b''$, une cubique double c_3 et, sur celle-ci, deux points triples A et B.

Les sections planes sont, en général, des sextiques à six nœuds; pour les sections passant par A et B, il y a quatre points doubles et deux points triples, ce qui équivaut à dix nœuds et ces sections sont unicursales.

Mais la surface T_6 est elle-même unicursale, et nous allons en donner une représentation plane assez simple.

D'abord, rien ne nous empêche de choisir, pour points y et z déterminant la droite yz, précisément les points d'appui de la cubique c_3 qui admet yz comme bisécante. Nous avons trouvé les équations d'une cubique de la gerbe G définie par le point $y + kz$ de la droite yz :

$$\frac{b_x(a_y + ka_z)}{a_x(b_y + kb_z)} = \frac{b'_x(a'_y + ka'_z)}{a'_x(b'_y + kb'_z)} = \frac{b''_x(a''_y + ka''_z)}{a''_x(b''_y + kb''_z)} = \omega.$$

Ces équations peuvent être remplacées par

$$b_x(a_y + ka_z) = \omega a_x(b_y + kb_z)$$

et deux autres analogues. On peut en tirer des valeurs de x_1, x_2, x_3, x_4 proportionnelles à des fonctions du sixième degré en k et ω, mais où ces deux paramètres n'entrent qu'à la troisième puissance.

Posons

$$k = \frac{\mu_1}{\mu_3}, \quad \omega = \frac{\mu_2}{\mu_3};$$

nous pourrons écrire symboliquement

$$\sigma x_i = f_i(\mu_1^3, \mu_2^3, \mu_3^6).$$

Dans la représentation de la surface T_6 sur un plan π, μ_1, μ_2, μ_3 seront les coordonnées du point μ, image du point x, rapporté à un triangle de référence FGH, où GH, HF, FG ont respectivement pour équation $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = 0$, $\mu_3 = 0$.

52. Disons un mot de cette représentation paramétrique. Nous appellerons *courbes fondamentales* dans le plan π, les courbes images des sections planes de T_6. Elles sont du sixième ordre, et puisque μ_1 et μ_2 ne figurent qu'au troisième degré, dans leurs équations, elles ont un point triple en F ($\mu_2 = \mu_3 = 0$) et en G ($\mu_1 = \mu_3 = 0$).

Pour que la surface représentée soit du sixième ordre, il faut que les courbes fondamentales se coupent en $36 - 6 = 30$ points fixes; les

deux points triples communs comptent déjà pour 18 intersections; on doit donc trouver encore 12 points fondamentaux.

Aux droites passant par G et représentées par $\mu_1 : \mu_5 = k =$ constante, répondent les cubiques gauches génératrices de T_6. Mais celles de ces droites qui passent par un point fondamental autre que F et G correspondent à des coniques de T_6; les 12 points fondamentaux autres que F et G représentent donc chacun une droite d'une des douze cubiques dégénérées de la surface. La droite GH ou $\mu_1 = 0$ répond à $k = 0$, donc à la cubique génératrice passant par le point y, ou, d'après notre hypothèse à la cubique double de T_6.

La droite GF ou $\mu_5 = 0$ répond à $\omega = \infty$, $k = \infty$ et ces valeurs ne peuvent être réalisées en général que pour le seul point A.

Voyons maintenant les diverses cubiques génératrices de T_6 qui dégénèrent en une droite et une conique. Une de ces droites part de A et s'appuie sur ab et $a'b'$; c'est donc la droite aa'; dans les équations

$$\frac{b_x(a_y + ka_z)}{a_x(b_y + kb_z)} = \frac{b'_x(a'_y + ka'_z)}{a'_x(b'_y + kb'_z)} = \frac{b''_x(a''_y + ka''_z)}{a''_x(b''_y + kb''_z)} = \omega,$$

qui représentent une cubique génératrice de T_6, si $a_x = 0$ et $a'_x = 0$, on a $\omega = \infty$ et $k = -\frac{b''_y}{b''_z}$; l'image de la droite aa' sur le plan π est donc le point triple G lui-même; la droite du plan π représentée par $k = \mu_1 : \mu_5 = -b''_y : b''_z$ répond donc à la conique qui, avec aa', constitue une cubique dégénérée de T_6 et coupe donc toutes les courbes fondamentales en deux points variables seulement; elle est donc tangente, en G, à toutes les courbes fondamentales. Il en est de même des droites images des coniques qui constituent, avec $a'a''$ et $a''a$, des cubiques dégénérées.

Quant aux droites bb', $b'b''$, $b''b$, elles ont pour image, chacune un point situé sur le côté HF ($\mu_2 = 0$, $\omega = 0$).

Aux droites du plan π qui passent par le point triple F, répondent des cubiques gauches de T_6, autres que les cubiques génératrices. Nous y reviendrons bientôt. Observons seulement ici les exceptions qui se présentent : la droite FH ou $\mu_2 = 0$ donne $\omega = 0$ ce qui répond au point B ou à une des droites bb', $b'b''$, $b''b$, représentées par trois points de FH; nous avons déjà vu que FG représente le point A et les rayons aa', $a'a''$, $a''a$; quant à la droite menée par F et définie par $\mu_2 = \mu_5$ ou $\omega = 1$, elle répond à la droite yz, car, si dans les équations précé-

dentes, on fait $x \equiv y + kz$, on a $\omega = 1$; par suite cette droite $\mu_2 = \mu_1$ contient deux points fondamentaux répondant aux droites de T_6 qui s'appuient sur *ab*, *a'b'*, *a''b''*, *yz*.

Enfin il y a, dans le plan π, quatre points fondamentaux simples; ils représentent les droites appartenant aux cubiques dégénérées qui sont rencontrées par *yz* sur leurs coniques.

En résumé, *les courbes fondamentales du plan* π *ont en commun un point triple* G *et trois tangentes communes en ce point, plus un point triple* F, *plus neuf points communs simples, dont trois alignés sur* F *et deux autres alignés sur* F.

53. Nous venons de trouver sur T_6, une seconde série de cubiques gauches c_3'; les courbes génératrices seront appelées c_3.

Les courbes images de c_3' ont pour équation $\mu_2 : \mu_1 = \omega =$ const.; chaque cubique c_3' est donc le lieu des points de même paramètre sur les cubiques génératrices.

Une courbe c_3' dans l'espace est représentée par les équations suivantes, où ω a une valeur particulière :

$$\frac{b_x a_y - \omega a_x b_y}{b_x a_z - \omega a_x b_z} = \frac{b'_x a'_y - \omega a'_x b'_y}{b'_x a'_z - \omega a'_x b'_z} = \frac{b''_x a''_y - \omega a''_x b''_y}{b''_x a''_z - \omega a''_x b''_z} = -k.$$

Les courbes c_3' *ont donc ab, a'b', a''b'' pour bisécantes.*

Dans la seconde série de cubiques (c_3'), trois courbes dégénèrent en trois droites, savoir : pour $\omega = 1$, la droite *yz* et les deux directrices du système réglé (*ab*, *a'b'*, *a''b''*) qui rencontrent *yz*; pour $\omega = 0$, les droites *bb'*, *b'b''*, *b''b*; pour $\omega = \infty$, les droites *aa'*, *a'a''*, *a''a*.

Quatre autres cubiques c_3' se décomposent en une droite et une conique; les images de ces coniques sont les droites joignant F aux quatre derniers points fondamentaux trouvés.

54. Pour k constant et ω variable, on a une cubique c_3 génératrice de T_6; donc les courbes de la première série sont aussi des lieux de points de même paramètre sur les courbes de la deuxième série.

Si l'on donne, à ω, deux valeurs particulières ω_1 et ω_2, on détermine deux cubiques c_3'; aux mêmes valeurs du paramètre k, répondent les intersections de ces courbes par les mêmes cubiques c_3; mais les points répondant aux mêmes valeurs de k sont projetés de *ab* suivant les faisceaux de plans

$$b_x a_y - \omega_1 a_x b_y + k(b_x a_z - \omega_1 a_x b_z) = 0,$$
$$b_x a_y - \omega_2 a_x b_y + k(b_x a_z - \omega_2 a_x b_z) = 0$$

et ces faisceaux sont projectifs. Donc toutes les courbes c_3 marquent, sur deux courbes c'_3, des ponctuelles projectives.

On démontre de même que les cubiques c'_3 marquent, sur deux courbes c_3, des séries projectives de points.

Ainsi, *chacune des séries de cubiques gauches de T_6 marque, sur les courbes de l'autre série, des ponctuelles projectives.*

55. Une relation de la forme $k\omega + \beta k + \gamma\omega + \delta = 0$ établit une espèce de collinéation entre les deux systèmes de courbes c_3 et c'_3. Le lieu des points de rencontre des courbes homologues est une courbe de T_6, dont l'image sur le plan π est une conique passant par F et G; donc la courbe sur T_6 est en général du sixième ordre. Mais cette courbe peut s'abaisser au cinquième, au quatrième ou au troisième ordre, quand la conique image passe par un, deux ou trois points fondamentaux autres que F et G.

56. Une bisécante de la cubique

$$\frac{b_x(a_y+ka_z)}{a_x(b_y+kb_z)} = \frac{b'_x(a'_y+ka'_z)}{a'_x(b'_y+kb'_z)} = \frac{b''_x(a''_y+ka''_z)}{a''_x(b''_y+kb''_z)}$$

est représentée par les équations

$$\Sigma\lambda b_x(a_y+ka_z)=0,\quad \Sigma\lambda a_x(b_y+kb_z)=0.$$

Si cette bisécante passe par un point fixe X, on a

$$\Sigma\lambda b_X(a_y+ka_z)=0,\quad \Sigma\lambda a_X(b_y+kb_z)=0.$$

Ces deux dernières égalités donnent λ, λ', λ'' en fonctions, du second degré, de k; en portant ces fonctions dans les deux premières égalités, on obtient deux relations cubiques en k et linéaires en x; l'élimination de k donne une équation du sixième ordre représentant le cône engendré par les bisécantes menées de X aux cubiques génératrices de la surface T_6. On a donc la propriété :

Les cubiques de la gerbe G qui s'appuient sur une droite yz ont un système de bisécantes formant un complexe du sixième ordre.

57. Après avoir étudié la surface T_6, lieu des cubiques de la gerbe G qui rencontrent une droite, il convient d'examiner ce que devient cette surface dans les deux cas particuliers de la gerbe de Reye et de celle de Sturm.

Lorsque les trois bisécantes ab, $a'b'$, $a''b''$ sont dans un même plan ζ,

les cubiques passent par cinq points, et M. Reye a démontré que celles de ces cubiques qui rencontrent une droite engendrent une surface du cinquième ordre. Il est naturel de conjecturer que T_6 se décompose alors en une surface T_5 accompagnée du plan ζ.

La vérification analytique est pénible ; on la simplifie par un choix convenable du tétraèdre de référence : les bisécantes ab, $a'b'$, $a''b''$ deviendront les côtés de la face $x_4 = 0$ de ce tétraèdre ; le point A sera le sommet opposé, et l'on peut toujours faire en sorte que les coordonnées de B soient égales (*). Dans ces conditions, il faut remplacer a_x, a'_x, a''_x par x_1, x_2, x_3 et b_x, b'_x, b''_x par $x_1 - x_4$, $x_2 - x_4$, $x_3 - x_4$. L'équation de la surface T_6 trouvée plus haut,

$$U_3 V_3 = U'_3 V'_3,$$

a dès lors pour premier membre

$$| (x_i - x_4)\, y_i \quad (x_i - x_4)\, z_i \quad x_i (y_i - y_4) | \times$$
$$| (x_i - x_4)\, z_i \quad x_i (y_i - y_4) \quad x_i (z_i - z_4) | ,$$

i prenant les valeurs 1, 2, 3 dans les lignes successives des déterminants. On peut écrire l'expression précédente sous la forme

$$| x_i y_i \quad x_i z_i \quad x_i (y_i - y_4) | \times | x_i z_i \quad x_i (y_i - y_4) \quad x_i (z_i - z_4) |$$
$$+ x_4 f(x_1, x_2, x_3).$$

Le terme indépendant de x_4 est égal à

$$x_1^2 x_2^2 x_3^2 \, | y_i \quad z_i \quad y_i - y_4 | \times | z_i \quad y_i - y_4 \quad z_i - z_4 | =$$
$$x_1^2 x_2^2 x_3^2 \, y_4 z_4 \, | y_i \quad z_i \quad 1 | \times | z_i \quad y_i - y_4 \quad 1 |$$

ou enfin, si, dans le dernier déterminant, on ajoute, à la seconde colonne, les termes de la troisième multipliés par y_4,

$$x_1^2 x_2^2 x_3^2 \, y_4 z_4 \, | y_i \quad z_i \quad 1 |^2.$$

Mais, dans l'équation

$$U_3 V_3 = U'_3 V'_3,$$

le second membre ne diffère du premier que par l'interversion de y et z ; donc le terme indépendant de x_4 est le même que dans le premier membre et la surface T_6 dégénère en une surface du cinquième ordre accompagnée du plan x_4. A la vérité, il faudrait voir encore si le terme en x_4 ne s'annule pas ; mais nous ne ferons pas ce calcul, qui ne peut que nous faire retrouver une proposition connue et plutôt étrangère à notre sujet.

(*) C'est le système de coordonnées utilisé par M. Humbert (*loc. cit.*) pour la gerbe de Reye.

S'il s'agit de la *gerbe de Sturm*, il faut, d'après nos préliminaires, faire $a'_x \equiv b_x$, $a''_x \equiv b'_x$; la fonction U_5V_5 devient alors

$$\begin{vmatrix} b_x a_y & b_x a_z & a_x b_y \\ b'_x b_y & b'_x b_z & b_x b'_y \\ b''_x b'_y & b''_x b'_z & b'_x b''_y \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_x a_z & a_x b_y & a_x b_z \\ b'_x b_z & b_x b'_y & b_x b'_z \\ b'_x b'_z & b'_x b''_y & b'_x b''_z \end{vmatrix}$$

et le terme indépendant de b_x s'obtient en faisant $b_x = 0$, ce qui donne

$$a_x b_y \begin{vmatrix} b'_x b_y & b'_x b_z \\ b'_x b'_y & b''_x b'_z \end{vmatrix} \times (-1)\, b'_x b_z \begin{vmatrix} a_x b_y & a_x b_z \\ b'_x b'_y & b'_x b''_z \end{vmatrix} \equiv$$

$$-(a_x)^2 (b'_x)^3 b''_x b_y b_z \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ b'_y & b'_z \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ b'_y & b''_z \end{vmatrix}.$$

Comme la fonction $U'_5V'_5$ se déduit de U_5V_5 par interversion de y et z, le terme indépendant de b_x, dans l'équation de T_6, est identiquement nul ; T_6 contient donc le facteur b_x et, par analogie, aussi b'_x; les plans b et b' écartés, il reste une surface du quatrième ordre engendrée par les cubiques de la gerbe de Sturm qui s'appuient sur une droite. Ce théorème est connu.

58. Nous abordons la question des tangentes aux cubiques de la gerbe G. Celle de ces courbes qui passe par le point y a pour équations

$$\frac{a_x b_y}{a_y b_x} = \frac{a'_x b'_y}{a'_y b'_x} = \frac{a''_x b''_y}{a''_y b''_x}.$$

Le réseau des hyperboloïdes circonscrits à cette courbe est représenté par l'équation suivante, λ, λ', λ'' étant des paramètres arbitraires,

$$|\ a_x b_y \quad a_y b_x \quad \lambda\ | = 0.$$

Les plans tangents, en y, à ces quadriques sont représentés par la relation

$$|\ a_x b_y \quad a_y b_y \quad \lambda\ | + |\ a_y b_y \quad a_y b_x \quad \lambda\ | = 0,$$

ou encore par

$$|\ a_x b_y - a_y b_x \quad a_y b_y \quad \lambda\ | = 0.$$

Bien qu'elle contienne trois paramètres λ, λ', λ'', cette équation représente un simple faisceau de plans dont l'axe est représenté par

$$\frac{a_x b_y - a_y b_x}{a_y b_y} = \frac{a'_x b'_y - a'_y b'_x}{a'_y b'_y} = \frac{a''_x b''_y - a''_y b''_x}{a''_y b''_y}.$$

Telles sont donc les équations de la tangente, en y, à la cubique de la gerbe G déterminée par ce même point y.

En y regardant les y comme variables, on a le lieu des contacts des tangentes menées aux cubiques de la gerbe et passant par un point fixe x.

59. Considérons, plus généralement, les équations

$$\frac{m_x}{n_x^2} = \frac{m'_x}{n'^2_x} = \frac{m''_x}{n''^2_x},$$

où les m représentent trois plans et les n trois quadriques. Elles définissent une courbe gauche du septième ordre k_7.

En effet. si l'on égale le premier rapport successivement à chacun des deux autres, on obtient les équations de deux surfaces cubiques dont l'intersection est donc du neuvième ordre. Mais les points d'une certaine conique c_2 annulent les termes m_x, n_x^2 du premier rapport et satisfont donc aux équations des deux surfaces cubiques sans égaler, en général, les deux derniers rapports; l'intersection du neuvième ordre se compose donc de c_2 et d'une courbe du septième, k_7.

La théorie de cette courbe présente des analogies avec celle de la cubique gauche et nous espérons pouvoir nous en occuper dans un travail ultérieur. Ici nous n'entrerons pas dans le détail de cette étude qui nous entraînerait loin de notre sujet.

Constatons seulement que chacun des trois rapports proposés peut être remplacé par un rapport de la forme

$$\Sigma\lambda m_x : \Sigma\lambda n_x^2,$$

de sorte que la courbe k_7 établit une projectivité entre une gerbe de plans m et un réseau de quadriques n^2. Or, il peut arriver, dans des cas particuliers, que des quadriques de ce réseau dégénèrent en deux plans; alors la conique c_2 se décompose en deux droites. Et même, si à une quadrique composée de deux plans, correspond, dans la gerbe (m), un plan passant par l'intersection des deux plans précédents, on se trouvera dans un cas plus spécial encore et la conique c_2 se réduira à deux droites confondues. C'est précisément ce qui se présente dans les équations du n° précédent. que nous écrivons ici en intervertissant les y et les x, de sorte que le point fixe est y et les coordonnées courantes x_i :

$$\frac{a_x b_y - a_y b_x}{a_x b_x} = \frac{a'_x b'_y - a'_y b'_x}{a'_x b'_x} = \frac{a''_x b''_y - a''_y b''_x}{a''_x b''_x}.$$

Le plan représenté par chaque numérateur passe par l'intersection

des plans définis par le dénominateur. La courbe gauche que nous rencontrons dans la gerbe G, est donc un cas particulier de la courbe k_7; elle est néanmoins encore du septième ordre. Si les axes ab, $a'b'$, $a''b''$ se coupent deux à deux, on a un cas plus particulier encore, relatif à la gerbe de Reye ; ce cas a été étudié avec soin par M. Humbert.

Ainsi, *dans la gerbe G et dans la gerbe de Reye, le lieu des contacts des tangentes issues d'un point donné est une courbe gauche du septième ordre.*

60. Le résultat se modifie dans la *gerbe de Sturm*. Si $a' \equiv b$, $a'' \equiv b'$, les équations du n° précédent deviennent

$$\frac{a_x b_y - a_y b_x}{a_x} = \frac{b_x b'_y - b_y b'_x}{b'_x}; \quad \frac{b_x b'_y - b_y b'_x}{b_x} = \frac{b'_x b''_y - b'_y b''_x}{b''_x}.$$

Elles représentent une biquadratique ; mais il faut en défalquer la droite bb', dont les points annulent les termes du rapport moyen, sans égaler, en général, les rapports extrêmes du n° précédent. On retrouve ce théorème connu.

Dans la gerbe de Sturm, les contacts des tangentes issues d'un point donné décrivent une cubique gauche.

61. Dans la gerbe G, on a trouvé une courbe c_7, lieu des contacts des tangentes issues d'un point y. En faisant $x = y$, dans les équations de cette courbe, on les vérifie identiquement : c_7 passe donc par y. Or, le cône qui projette une courbe du septième ordre d'un de ses points est, en général, du sixième degré. La même propriété est connue pour la gerbe de Reye.

Dans la gerbe G *et dans la gerbe de la Reye, le complexe des tangentes est du sixième ordre.*

62. A la vérité, pour pouvoir affirmer cette dernière proposition, il faudrait établir que y n'est pas un point double de la courbe c_7. Nous pourrions faire cette démonstration qui n'est pas fort difficile, mais il nous paraît préférable de chercher directement l'équation du cône qui projette c_7 du point y. Ceci se fait très simplement en remplaçant dans les équations de c_7, x par $y + kx$: nous aurons la relation

$$\frac{a_y b_y + k a_x b_y - a_y b_y - k a_y b_x}{a_y b_y + k(a_x b_y + a_y b_x) + k^2 a_x b_x} = \omega$$

et deux autres analogues, entre lesquelles il faut éliminer k et ω. On peut écrire la relation précédente comme il suit

$$k\,(a_x b_y - a_y b_x) - \omega a_y b_y - k\omega\,(a_x b_y + a_y b_x) - k^2 \omega a_x b_x = 0.$$

Multiplions par k; nous aurons, en tout, six relations linéaires et homogènes en k, k^2, ω, $k\omega$, $k^2\omega$, $k^3\omega$; l'élimination de ces quantités donne l'équation suivante du cône Γ_6 formé par les tangentes de la gerbe G passant par y :

$$\Gamma_6 \equiv \begin{vmatrix} a_x b_y - a_y b_x & 0 & a_y b_y & a_x b_y + a_y b_x & a_x b_x & 0 \\ 0 & a_x b_y - a_y b_x & 0 & a_y b_y & a_x b_y + a_y b_x & a_x b_x \\ a'_x b'_y - a'_y b'_x & 0 & a'_y b'_y & a'_x b'_y + a'_y b'_x & a'_x b'_x & 0 \\ 0 & a'_x b'_y - a'_y b'_x & 0 & a'_y b'_y & a'_x b'_y + a'_y b'_x & a'_x b'_x \\ a''_x b''_y - a''_y b''_x & 0 & a''_y b''_y & a''_x b''_y + a''_y b''_x & a''_x b''_x & 0 \\ 0 & a''_x b''_y - a''_y b''_x & 0 & a''_y b''_y & a''_x b''_y + a''_y b''_x & a''_x b''_x \end{vmatrix} = 0$$

Les coordonnées du point A annulent a_x, a'_x, a''_x et par suite la dernière colonne du déterminant; de plus elles rendent la première colonne identique, au signe près, à la quatrième; donc A est un point double et yA une génératrice double du cône Γ_6. Donc yA est tangente à deux cubiques de la gerbe, mais, pour chacune d'elles, le contact doit avoir lieu en A, car une tangente en un point d'une cubique gauche ne peut plus rencontrer cette ligne ailleurs. Ainsi la droite yA rencontre c_7 en deux points autres que y et ces points coïncident en A, c'est-à-dire que yA touche c_7 en A et que le cône Γ_6 a la droite yA pour génératrice de rebroussement.

La même chose a lieu pour le point B.

Dans la gerbe G, le cône du complexe des tangentes ayant pour sommet un point quelconque a deux génératrices cuspidales passant par A *et* B.

Il est bien évident que le même raisonnement s'applique aux cinq points de base d'une gerbe de Reye. Nous rencontrons ainsi ce théorème de M. Sturm, retrouvé plus tard par M. Humbert.

Dans la gerbe de Reye, le cône du complexe des tangentes ayant pour sommet un point quelconque a cinq génératrices cuspidales passant par les points de base de la gerbe.

63. Revenons à la gerbe G. Les faisceaux projectifs

$$\frac{a_x}{a_y} = k\,\frac{b_x}{b_y}, \qquad \frac{a'_x}{a'_y} = k\,\frac{b'_x}{b'_y}$$

engendrent une quadrique passant par les droites ab, $a'b'$, par les points A et B et (pour $k = 1$) par le point y.

Par ce point y on peut mener deux génératrices rectilignes de la quadrique : l'une est représentée par les équations précédentes où l'on fait $k = 1$; elle rencontre ab et $a'b'$; l'autre, de même système que ab et $a'b'$, a pour équations

$$\frac{a_x}{a_y} = \frac{a'_x}{a'_y} \quad \text{et} \quad \frac{b_x}{b_y} = \frac{b'_x}{b'_y}.$$

Appelons cette droite d; si pour un point particulier x de cette droite, on a

$$\frac{a_x}{a_y} = \frac{a'_x}{a'_y} = \mu, \qquad \frac{b_x}{b_y} = \frac{b'_x}{b'_y} = \nu,$$

on peut, dans le déterminant Γ_6 trouvé précédemment, remplacer a_x, a'_x, b_x, b'_x par μa_y, $\mu a'_y$, νb_y, $\nu b'_y$ et l'on remarque que les termes de la première et de la troisième ligne sont proportionnels, de même que les termes de la seconde et de la quatrième ligne.

Dans la gerbe G, *le cône du complexe des tangentes ayant pour sommet un point* y *possède trois génératrices doubles* d; *ce sont des rayons de systèmes réglés passant tous trois par* A, B, y *et admettant respectivement pour rayons deux des droites* ab, a'b', a''b''.

Si deux de ces droites se rencontrent en un point C, le système réglé correspondant est un cône et la droite d passe par C; elle devient alors, comme on l'a vu au n° précédent, une génératrice cuspidale de Γ_6.

Le problème du n° 50 (trouver une cubique de la gerbe G qui admet comme bisécante une droite donnée) est, en effet, indéterminé quand la droite en question (yz) est la droite d ci-dessus, c'est-à-dire quand on a

$$\frac{a_z}{a_y} = \frac{a'_z}{a'_y}, \qquad \frac{b_z}{b_y} = \frac{b'_z}{b'_y}$$

ou encore

$$|\, a_y \;\; a'_z \,| = 0, \qquad |\, b_y \;\; b'_z \,| = 0.$$

Car alors α'' est indéterminé, tandis que l'on a

$$\alpha : \alpha' = \frac{|\, a'_y \;\; a''_z \,|}{|\, b'_y \;\; b''_z \,|} : \frac{|\, a''_y \;\; a_z \,|}{|\, b''_y \;\; b_z \,|}$$

Les cubiques qui répondent à la question sont donc

$$\frac{a_x \mid a'_y \quad a''_z \mid}{b_x \mid b'_y \quad b''_z \mid} = \frac{a'_x \mid a''_y \quad a_z \mid}{b'_x \mid b''_y \quad b_z \mid} = \frac{\alpha'' a''_x}{b''_x}.$$

Elles sont toutes sur la quadrique représentée par l'égalité des deux premiers rapports et cette quadrique passe visiblement par A, B, ab, $a'b'$ et évidemment par d, puisque cette droite est bisécante de toutes ces courbes.

Elles sont en outre chacune sur une quadrique du faisceau représenté par les deux derniers rapports (α'' arbitraire); ce faisceau marque, sur d, une involution à deux points doubles correspondants à deux courbes de la gerbe qui touchent d.

64. Pour la *gerbe de Sturm*, nous avons vu que le lieu des contacts des tangentes issues d'un point y est une cubique et que les équations

$$\frac{a_x b_y - a_y b_x}{a_x} = \frac{b_x b'_y - b_y b'_x}{b'_x}; \quad \frac{b_x b'_y - b_y b'_x}{b_x} = \frac{b'_x b''_y - b'_y b''_x}{b''_x}$$

représentent cette courbe plus la droite bb'.

Le point y est sur la cubique et le cône qui la projette de y est du second ordre; tel est donc aussi l'ordre du complexe des tangentes.

On vérifie d'ailleurs facilement que les sommets du tétraèdre $abb'b''$ sont sur la cubique gauche ci-dessus, quel que soit y.

Echangeons les x et les y dans les équations précédentes ; nous aurons les équations de la tangente, au point y, à la courbe de la gerbe qui passe par y :

$$\frac{a_x b_y - a_y b_x}{a_y} = \frac{b_x b'_y - b_y b'_x}{b'_y}; \quad \frac{b_x b'_y - b_y b'_x}{b_y} = \frac{b'_x b''_y - b'_y b''_x}{b''_y}.$$

Ces relations peuvent s'écrire aussi :

$$\frac{2b_x}{b_y} = \frac{a_x}{b_y} + \frac{b'_x}{b'_y}; \quad \frac{2b'_x}{b'_y} = \frac{b_x}{b_y} + \frac{b''_x}{b''_y}.$$

Si la tangente perce les plans a, b'', b, b' respectivement en M, N, P, Q, le rapport anharmonique de ces quatre points est égal à celui des quatre plans,

$$a_x = 0, \quad b''_x = 0, \quad \frac{a_x}{b''_x} = \frac{a_P}{b''_P}; \quad \frac{a_x}{b''_x} = \frac{a_Q}{b''_Q}$$

ou encore à

$$\frac{a_P}{b''_P} : \frac{a_Q}{b''_Q}.$$

Or, les équations de la tangente donnent, puisque $b_P \equiv 0$, $b'_Q \equiv 0$,

$$\frac{a_P}{a_y} = -\frac{b'_P}{b'_y} \quad \text{et} \quad \frac{b''_P}{b''_y} = \frac{2b'_P}{b'_y}; \quad \text{d'où} \quad \frac{a_P}{b''_P} = -\frac{1}{2}\frac{a_y}{b''_y}$$

$$\frac{a_Q}{a_y} = \frac{2b_Q}{b_y} \quad \text{et} \quad \frac{b''_Q}{b''_y} = -\frac{b_Q}{b_y}; \quad \text{d'où} \quad \frac{a_Q}{b''_Q} = -2\frac{a_y}{b''_y}$$

et finalement

$$\frac{a_P}{b''_P} : \frac{a_Q}{b''_Q} = \frac{1}{4}.$$

On a donc le résultat suivant, d'ailleurs bien connu :

Dans la gerbe de Sturm, le complexe des tangentes est un complexe tétraédral dont le rapport anharmonique est 1/4.

65. Nous passons à une autre série de propriétés de la gerbe G.

Nous avons vu que la courbe de cette gerbe déterminée par le point y a pour équations

$$\frac{a_x b_y}{a_y b_x} = \frac{a'_x b'_y}{a'_y b'_x} = \frac{a''_x b''_y}{a''_y b''_x} = \omega.$$

Cherchons l'équation du cône circonscrit de sommet y; il suffit de remplacer x par $y + kx$, puis d'éliminer k. Cette substitution donne la relation

$$a_y b_y + k a_x b_y = \omega\,(a_y b_y + k a_y b_x)$$

ou encore

$$a_y b_y\,(1 - \omega) + k a_x b_y - k\omega\, a_y b_x = 0$$

et deux autres analogues. L'élimination de k et ω donne

$$|\; a_x b_y \quad a_y b_x \quad a_y b_y \;| = 0.$$

Cette équation représente le cône de sommet y *circonscrit à la cubique de la gerbe qui passe par ce point* y.

Elle exprime aussi qu'un point y d'une certaine courbe de la gerbe et un point x pris en dehors sont sur une même bisécante de cette courbe.

Donc si l'on y regarde les y comme variables, la relation précédente représente le lieu des points de rencontre des cubiques de la gerbe avec les bisécantes qu'on peut leur mener du point fixe x.

Echangeons les x et les y :

$$|\; a_x b_y \quad a_y b_x \quad a_x b_x \;| = 0.$$

Les bisécantes menées d'un point fixe y *aux cubiques de la gerbe* G *rencontrent ces courbes sur une surface du quatrième ordre* T_4.

66. Si on remplace x par les coordonnées de A (ou B), on annule deux colonnes du déterminant; donc A et B sont des points doubles de T_4; on voit de même que les droites ab, $a'b'$, $a''b''$ sont tout entières sur la surface.

La cubique de la gerbe déterminée par le point y est sur la surface T_4, car les coordonnées de ses points rendent les termes des deux premières colonnes du déterminant proportionnels.

Il est géométriquement évident que le point y est un point double de la surface T_4, car une droite par y ne contient que deux autres points de T_4; au surplus, si l'on fait $x = y$ dans le déterminant précédent, les trois colonnes deviennent identiques, et l'on peut, par soustraction, obtenir deux colonnes de termes nuls.

Cherchons le cône des tangentes en y à T_4; posons $x = y + kz$; le déterminant devient

$$| a_y b_y + k a_z b_y \quad a_y b_y + k a_y b_z \quad a_y b_y + k(a_y b_z + a_z b_y) + k^2 a_z b_z |.$$

Le terme en k^2 est

$$k^2 \left\{ \begin{array}{l} | a_z b_y \quad a_y b_z \quad a_y b_y | + | a_y b_y \quad a_y b_z \quad a_y b_z + a_z b_y | \\ + | a_z b_y \quad a_y b_y \quad a_y b_z + a_z b_y | + | a_y b_y \quad a_y b_y \quad a_z b_z | \end{array} \right\}.$$

Le quatrième déterminant est nul; le second et le troisième se simplifient par soustraction de colonnes et l'un d'eux se détruit avec le premier; il reste

$$k^2 \, | a_y b_y \quad a_y b_z \quad a_z b_y |$$

Or, pour z variable, cette expression égalée à zéro représente le cône de sommet y circonscrit à la cubique de la gerbe qui passe par y.

La surface T_4 *a le point* y *pour point double et le cône tangent en ce point est le cône perspectif à la cubique de la gerbe déterminée par ce point* y.

67. La première surface polaire de y relativement à T_4 est une surface cubique T_3, lieu des conjugués du point y par rapport aux cubiques de la gerbe G. Elle admet A et B comme points simples et y comme point double et elle touche en y le même cône que la surface T_4.

Son équation s'obtient par l'application du symbole $\Sigma y \dfrac{d}{dx}$ au détermi-

nant T_3, ou, successivement, à chacune des colonnes de ce déterminant :

$$|\,a_y b_y \quad a_y b_x \quad a_x b_x\,| + |\,a_x b_y \quad a_y b_y \quad a_x b_x\,|$$
$$+ |\,a_x b_y \quad a_y b_x \quad a_x b_y\,| + |\,a_x b_y \quad a_y b_x \quad a_y b_x\,|\,;$$

les deux derniers déterminants sont nuls et les deux premiers donnent

$$T_3 = |\,a_x b_y - a_y b_x \quad a_y b_y \quad a_x b_x\,|$$

La courbe c_7 lieu des contacts des tangentes issues de y se trouve sur T_3, car ses points rendent proportionnels les termes de la première et de la troisième colonne ; cette courbe c_7 est d'ailleurs aussi sur la surface T_4. La tangente en y à la cubique de la gerbe passant par y est tout entière sur la surface T_3, car ses points rendent proportionnels les termes de la première et de la seconde colonne du déterminant T_3.

Le lieu des conjugués d'un point y *par rapport aux cubiques de la gerbe* G *est une surface du troisième ordre, ayant le point* y *pour point double. Le cône des tangentes en* y *est perspectif à la cubique de la gerbe passant par* y; *la tangente en* y *à cette cubique est toute entière sur la surface.*

La seconde partie de cet énoncé nous est communiquée par M SERVAIS.

68. On peut trouver, sous une autre forme, l'équation de la surface T_3 : l'égalité $\alpha a_x b'_x - \alpha' a'_x b_x = 0$ et deux analogues représentent trois quadriques circonscrites à une cubique variable

$$\frac{\alpha a_x}{b_x} = \frac{\alpha' a'_x}{b'_x} = \frac{\alpha'' a''_x}{b''_x}$$

de la gerbe G. Les plans polaires du point y relatifs à ces quadriques sont représentés par

$$\alpha\,(a_y b'_x + a_x b'_y) - \alpha'\,(a'_y b_x + a'_x b_y) = 0$$

et par deux relations analogues ; le point x commun à ces trois plans est le conjugué de y; le lieu de ce point s'obtient par élimination de α, α', α'' :

$$\begin{vmatrix} a_y b'_x + a_x b'_y & -(a'_y b_x + a'_x b_y) & 0 \\ a_y b''_x + a_x b''_y & 0 & -(a''_y b_x + a''_x b_y) \\ 0 & a'_y b''_x + a'_x b''_y & -(a''_y b'_x + a''_x b'_y) \end{vmatrix} = 0.$$

$a_y b'_x + a_x b'_y = 0$ représente le plan polaire de y par rapport aux plans a et b'; désignons-le par π_{12}. Soient de même π_{23}, π_{31} ; π_{21}, π_{32}, π_{13}, les

plans polaires de y par rapport aux couples de plans $a'b''$, $a''b$; $a'b$, $a''b'$, ab''. On aura

$$T_5 \equiv \begin{vmatrix} \pi_{12} & -\pi_{21} & 0 \\ \pi_{15} & 0 & -\pi_{31} \\ 0 & \pi_{53} & -\pi_{52} \end{vmatrix} \equiv \pi_{12}\pi_{25}\pi_{51} - \pi_{13}\pi_{52}\pi_{21} = 0.$$

La surface T_5 *est donc le lieu des points dont les produits des distances à deux triples de plans,* π_{12}, π_{25}, π_{51} et π_{15}, π_{52}, π_{21}, *sont dans un rapport constant.* Ce rapport est d'ailleurs déterminé par le point y, qui appartient, comme nous l'avons vu, à la surface.

De plus la surface T_5 appartient à un faisceau dont deux surfaces particulières, $\pi_{12}\pi_{25}\pi_{51}$ et $\pi_{13}\pi_{52}\pi_{21}$ dégénèrent en trois plans. Le plan tangent en un point M de T_5 passe par l'intersection des plans polaires de M relatifs aux deux triples de plans ci-dessus.

La construction du plan tangent en un point de T_5 *est linéaire.*

Les éléments de la courbure de T_3 en M dépendent des mêmes éléments de la quadrique polaire de M ; or, celle-ci passe par l'intersection des quadriques polaires de M relativement aux deux angles trièdres $\pi_{12}\pi_{25}\pi_{51}$ et $\pi_{15}\pi_{52}\pi_{21}$; ces quadriques sont des cônes.

La construction des éléments de la courbure en un point de T_5 *dépend de l'intersection de deux cônes du second ordre.*

Un plan de chacun des trièdres π coupe chaque plan de l'autre trièdre suivant une droite qui est tout entière sur T_5 ; ceci donne neuf droites de cette surface.

Les surfaces analogues à T_4 et T_5, dans les *gerbes de Reye et de Sturm* sont aussi respectivement du quatrième et du troisième ordre. Ce fait est connu.

69. Nous nous occuperons maintenant des plans tangents aux cubiques de la gerbe G

Les relations

$$\frac{a_x b_y - a_y b_x}{a_y b_y} = \frac{a'_x b'_y - a'_y b'_x}{a'_y b'_y} = \frac{a''_x b''_y - a''_y b''_x}{a''_y b''_y}$$

représentent, comme on l'a vu, la tangente en y à la cubique de la gerbe qui passe par y. Les équations

$$\Sigma l \frac{a_x b_y - a_y b_x}{a_y b_y} = 0, \quad \Sigma l = 0$$

représentent le faisceau des plans menés par cette tangente.

Pour qu'un de ces plans passe par deux points z et z', il faut que la première des relations précédentes soit satisfaite pour $x=z$ et $x=z'$. Ces substitutions nous donnent deux égalités qui, jointes à $\Sigma l=0$, permettent d'éliminer l, l', l''. La résultante est

$$| \, a_z b_y - a_y b_{z'} \quad a_{z'} b_y - a_y b_{z'} \quad a_y b_y \, | = 0.$$

Si l'on regarde y comme variable, on a le lieu des contacts des plans tangents menés de la droite zz' aux courbes de la gerbe G.

Dans la gerbe G, *le lieu des contacts des tangentes qui s'appuient sur une droite donnée est une surface du quatrième ordre* U_4.

Cette surface est évidemment engendrée aussi par une infinité simple de courbes c_7, lieux des contacts des tangentes qui passent par un point de zz'.

Son équation est satisfaite aussi pour

$$\frac{a_z b_y - a_y b_z}{a_{z'} b_y - a_y b_{z'}} = \frac{a'_z b'_y - a'_y b'_z}{a'_{z'} b'_y - a'_y b'_{z'}} = \frac{a''_z b''_y - a''_y b''_z}{a''_{z'} b''_y - a''_y b''_{z'}}.$$

Ces relations représentent, en apparence, une cubique gauche k_3; mais, en posant $y=z+kz'$, on vérifie, par un calcul facile, qu'elles sont satisfaites pour toutes les valeurs de k; donc la courbe k_3 dégénère en une droite zz' plus une conique ou un couple de droites. C'est ce dernier cas qui se réalise, car k_3 a visiblement pour bisécantes ab, $a'b'$ $a''b''$ et ces droites, n'étant pas dans un même plan, ne peuvent être trois bisécantes d'une même conique.

Ainsi, la courbe k_3 *se décompose en une droite* zz' *et deux droites réelles ou imaginaires s'appuyant à la fois sur* ab, a'b', a''b'', zz'.

On vérifie aussi que la surface U_4 passe par les points A et B et contient les droites ab, $a'b'$, $a''b''$.

70. Le résultat du n° précédent subit une réduction dans le cas de la *gerbe de Reye*.

Faisons encore, comme au n° 57,

$$a_x = x_1, \; a'_x = x_2, \; a''_x = x_3, \; b_x = x_1 - x_4, \; b'_x = x_2 - x_4, \; b''_x = x_3 - x_4,$$

L'équation de la surface U_4 devient

$$| \, z_i(y_i - y_4) - y_i(z_i - z_4) \quad z'_i(y_i - y_4) - y_i(z'_i - z'_4) \quad y_i(y_i - y_4) \, | = 0,$$
$$(i = 1, 2, 3);$$

ou encore

$$| \, y_i z_4 - z_i y_4 \quad y_i z'_4 - z'_i y_4 \quad y_i(y_i - y_4) \, | = 0.$$

Soustrayons, de la seconde colonne, les termes de la première multipliés par $z'_4 : z_4$; les termes de la seconde colonne seront alors divisibles par y_4; de sorte que, dans la *gerbe de Reye*, la surface U_4 se décompose en un plan contenant les droites ab, $a'b'$, $a''b''$, plus une surface du troisième ordre; car un calcul facile montre que le terme en y_4 de l'équation précédente n'est pas identiquement nul. Si l'on fait abstraction de ce plan y_4 qui ne satisfait pas aux conditions géométriques du problème, on retrouve ce théorème connu :

Dans la gerbe de Reye, le lieu des contacts des plans tangents menés par une droite donnée est une surface du troisième ordre.

Dans le cas de la *gerbe de Sturm*, on doit faire $a' \equiv b$, $a'' \equiv b'$ et l'on voit facilement que l'équation de la surface U_4 se décompose en $b_y = 0$, $b'_y = 0$ et une quadrique qui est alors le lieu cherché. Ce qui donne cet autre résultat connu :

Dans la gerbe de Sturm, le lieu des contats des plans tangents menés par une droite donnée est une surface du second ordre.

71. Si dans l'équation

$$| \, a_z b_y - a_y b_z \quad a_{z'} b_y - a_y b_{z'} \quad a_y b_y \, | = 0,$$

qui représente la surface U_4 pour la gerbe G, on remplace y par z, les termes de la première colonne s'annulent, mais les termes des deux autres colonnes ne sont, en général, ni nuls ni proportionnels. Mais z est un point quelconque de la droite zz'; donc cette droite tout entière est située sur la surface U_4 et en est une droite simple.

Une section de U_4 par un plan π contenant zz' se complète par une cubique, lieu des contacts du plan π avec les cubiques de la gerbe qui le touchent.

Par le même raisonnement, on montre que ce lieu est une conique dans le cas de la *gerbe de Reye* et une droite dans la *gerbe de Sturm*. On a ainsi ce théorème dont la seconde et la troisième partie sont connues.

Le lieu des contacts d'un plan avec les cubiques de la gerbe qui le touchent est du troisième, du second ou du premier ordre, suivant qu'il s'agit de la gerbe G, *de celle de Reye ou de celle de Sturm.*

72. Cherchons à présent l'équation du plan osculateur en y à la

cubique c_3 de la gerbe G qui est déterminée par le point y et dont les équations sont

$$\frac{a_x b_y}{a_y b_x} = \frac{a'_x b'_y}{a'_y b'_x} = \frac{a''_x b''_y}{a''_y b''_x} = \omega.$$

Nous avons trouvé que le faisceau des plans tangents en y est représenté par les relations

$$\Sigma l \frac{a_x b_y - a_y b_x}{a_y b_y} = 0, \quad \Sigma l = 0.$$

Entre la première de ces égalités et les équations de c_3, on peut éliminer les x et l'on obtiendra une relation du troisième degré en ω; deux de ses racines sont égales au paramètre du point y et celui-ci est visiblement $\omega = 1$. Pour que les deux égalités écrites en dernier lieu représentent un plan osculateur, il faut donc que l'équation en ω ait trois racines égales à l'unité, ou, ce qui revient au même, que le produit de ses trois racines soit 1, ou enfin que le coefficient de ω^3 et le terme indépendant de ω aient une somme nulle.

Or, voici cette équation en ω résultant de l'élimination des x :

$$\left| \Sigma l \frac{a_i b_y - a_y b_i}{a_y b_y} \quad a_i b_y - \omega a_y b_i \quad a'_i b'_y - \omega a'_y b'_i \quad a''_i b''_y - \omega a''_y b''_i \right| = 0.$$

Dans les lignes de ce déterminant, i prendra successivement les valeurs 1, 2, 3, 4. Le terme indépendant de ω et le coefficient de ω^3 ayant une somme nulle, on doit avoir

$$\left| \Sigma l \frac{a_i b_y - a_y b_i}{a_y b_y} \quad a_i b_y \quad a'_i b'_y \quad a''_i b''_y \right|$$
$$- \left| \Sigma l \frac{a_i b_y - a_y b_i}{a_y b_y} \quad b_i a_y \quad b'_i a'_y \quad b''_i a''_y \right| = 0.$$

On simplifie le premier déterminant en retranchant, de la première colonne, les termes des trois autres divisés respectivement par $a_y b_y$, $a'_y b'_y$, $a''_y b''_y$; on fait une opération analogue pour le second déterminant et l'on obtient

$$\left| \Sigma l \frac{b_i}{b_y} \quad a_i b_y \quad a'_i b'_y \quad a''_i b''_y \right| + \left| \Sigma l \frac{a_i}{a_y} \quad b_i a_y \quad b'_i a'_y \quad b''_i a''_y \right| = 0,$$

ou encore

$$l[(baa'a'')\, b'_y b''_y + (abb'b'')\, a'_y a''_y] + l'[(b'aa'a'')\, b''_y b_y + (a'bb'b'')\, a''_y a_y]$$
$$+ l''[(b''aa'a'')\, b_y b'_y + (a''bb'b'')\, a_y a'_y] = 0.$$

Il ne reste plus qu'à éliminer l, l', l'' entre cette équation de condition et les relations qui définissent le plan tangent,

$$\Sigma l \frac{a_x b_y - a_y b_x}{a_y b_y} = 0, \quad \Sigma l = 0.$$

La résultante est

$$\left| \frac{a_x b_y - a_y b_x}{a_y b_y} \quad (baa'a'')\, b'_y b''_y + (abb'b'')\, a'_y a''_y \quad 1 \right| = 0,$$

ou encore

$$| a_x b_y - a_y b_x \quad (baa'a'')\, a_y b_y b'_y b''_y + (abb'b'')\, b_y a_y a'_y a''_y \quad a_y b_y | = 0.$$

Pour x variable, c'est l'équation du plan osculateur cherché ; pour x fixe et y variable, c'est l'équation du lieu des contacts des plans osculateurs menés à des courbes de la gerbe G et passant par le point fixe x.

Si d'un point fixe, on mène des plans osculateurs aux cubiques de la gerbe G, *le lieu des points d'osculation est une surface du septième ordre* T_7.

73. Les points de T_7 qui rendent proportionnels les termes de la première et de la troisième colonne constituent la courbe c_7, lieu des contacts des tangentes passant par x.

On voit que la surface T_7 a les points A et B pour points doubles, x pour point simple ; elle contient les droites ab, $a'b'$, $a''b''$, dont les points annulent une ligne du déterminant T_7 et les droites aa', $a'a''$, $a''a$, bb', $b'b''$, $b''b$, dont les points annulent les termes d'un mineur du déterminant.

La surface T_7 contient encore une certaine courbe c, dont les équations

$$(baa'a'')\, b'_y b''_y + (abb'b'')\, a'_y a''_y = (b'aa'a'')\, b''_y b_y + (a'bb'b'')\, a''_y a_y$$
$$= (b''aa'a'')\, b_y b'_y + (a''bb'b'')\, a_y a'_y$$

s'obtiennent en écrivant que les termes de la seconde et de la troisième colonne du déterminant T_7 sont proportionnels.

Un point de cette courbe satisfait à l'équation de T_7 quel que soit x ; en d'autres mots, toutes les surfaces T_7 passent par cette courbe c, ou encore, en un point M de c, le plan osculateur à la cubique de la gerbe déterminée par M est indéterminé.

Si l'on observe que $(aa'a'')_i$ et $(bb'b'')_i$ sont respectivement les coor-

données de A et de B, les équations précédentes peuvent s'écrire symboliquement

$$b_A b'_y b''_y + a_B a'_y a''_y = b'_A b''_y b_y + a'_B a''_y a_y = b''_A b_y b'_y + a''_B a_y a'_y .$$

Si l'on pose $y = A + kB$, les membres de ces égalités deviennent tous trois

$$b_A b'_A b''_A + k^2 a_B a'_B a''_B .$$

Donc ces relations représentent deux quadriques ayant en commun la droite AB et dont l'intersection se complète par une cubique gauche. Les points de cette courbe ne peuvent définir des cubiques proprement dites de la gerbe G, car sinon leur plan osculateur serait déterminé. Ils doivent donc se trouver sur des courbes de la gerbe dégénérant en une droite et une conique.

Les plans menés par la tangente à la conique au point où elle est rencontrée par la droite forment évidemment le seul faisceau dont chaque élément rencontre le système de la droite et de la conique en trois points coïncidents.

Mais on a vu au commencement de ce chapitre que les cubiques dégénérées se composent des rayons s'appuyant sur ab, $a'b'$, $a''b''$ et des coniques reposant sur ces mêmes droites et passant par A et B ; ainsi se trouvent engendrées deux surfaces, l'une du second, l'autre du quatrième ordre, ayant en commun les axes ab, $a'b'$, $a''b''$ et les deux droites qui s'appuient à la fois sur ces axes et sur AB. L'intersection de ces surfaces se complète par une cubique gauche, précisément celle dont nous venons de parler.

Toutes les surfaces T_7 *passent par la droite* AB *et par une cubique gauche, lieu des points doubles des courbes dégénérées de la gerbe.*

74. Pour étudier la surface analogue à T_7 dans le cas de la *gerbe de Reye*, faisons encore

$$a_y = y_1, \quad a'_y = y_2, \quad a''_y = y_3;$$
$$b_y = y_1 - y_4, \quad b'_y = y_2 - y_4, \quad b''_y = y_3 - y_4.$$

On vérifie aisément que l'on a, dans ce cas

$$(baa'a'') = (b'aa'a'') = (b''aa'a'') = +1,$$
$$(abb'b'') = (a'bb'b'') = (a''bb'b'') = -1.$$

Dans le déterminant

$$T_7 = | \; a_x b_y - a_y b_x \quad (baa'a'')\, a_y b_y b'_y b''_y + (abb'b'')\, b_y a_y a'_y a''_y \quad a_y b_y \; | ,$$

les termes de la seconde colonne deviennent

$$y_i(y_1 - y_4)(y_2 - y_4)(y_3 - y_4) - y_1 y_2 y_3 (y_i - y_4) \qquad (i = 1, 2, 3);$$

ils sont tous divisibles par y_4 et T_7 se décompose en un plan y_4 et une surface T_6. On a ainsi le théorème connu :

Dans la gerbe de Reye, le lieu des contacts des plans osculateurs menés par un point est une surface du sixième ordre.

Pour la *gerbe de Sturm*, le résultat est beaucoup plus simple : lorsque l'on pose $a' \equiv b$, $a'' \equiv b'$, les déterminants $(baa'a'')$, $(b'aa'a'')$, $(a'bb'b'')$, $(a''bb'b'')$ sont nuls et l'équation du lieu considéré se réduit à

$$\begin{vmatrix} a_x b_y - a_y b_x & (abb'b'')\, a_y b_x^2 b'_y & a_y b_y \\ a'_x b'_y - a'_y b'_x & 0 & b_y b'_y \\ a''_x b''_y - a''_y b''_x & -(abb'b'')\, b_y b'^2_y b''_y & b'_y b''_y \end{vmatrix} = 0,$$

ou encore

$$(abb'b'')\, a_y b_y^3 b'^3_y b''_y \begin{vmatrix} \dfrac{a_x}{a_y} - \dfrac{b_x}{b_y} & 1 & 1 \\ \dfrac{b_x}{b_y} - \dfrac{b'_x}{b'_y} & 0 & 1 \\ \dfrac{b'_x}{b'_y} - \dfrac{b''_x}{b''_y} & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ou enfin, après un petit calcul, et en faisant abstraction des facteurs $(abb'b'')\, b_y^2 b'^2_y$,

$$a_y b_y b'_y b''_y \left[3 \left(\frac{b_x}{b_y} - \frac{b'_x}{b'_y} \right) - \left(\frac{a_x}{a_y} - \frac{b''_x}{b''_y} \right) \right] = 0,$$

résultat conforme à celui que nous avons donné dans nos ***Notes sur les cubiques gauches***.

Dans la gerbe de Sturm, le lieu des contacts des plans osculateurs menés par un point est une surface du troisième ordre.

75. L'équation de la surface T_7, relative à la gerbe G, établit une *liaison* entre les points x et y. Cette liaison est très spéciale : elle fait correspondre, à tout point y, un plan passant par ce point. Si l'on identifie cette relation à une équation linéaire en x représentant un plan donné u, on a trois égalités satisfaites pour un nombre fini de points y situés dans le plan u. En d'autres termes, la liaison considérée représente un *système focal supérieur* (*).

(*) R. Sturm, *Math. Ann.*, t. 19 et 28. — Ameseder, *Journ. f. Math.*, t. 97. — Voss, *Math. Ann.*, t. 23.

Faisons observer que toute gerbe linéaire de cubiques gauches donne naissance à un système pareil et que M. STURM a déterminé, pour toutes ces gerbes, les caractéristiques du système focal en se servant de la géométrie dénumérative. Notre étude nous permet de retrouver des résultats de cet auteur et ceux-ci nous serviront de contrôle.

D'après une théorie connue, tout système focal supérieur a trois caractéristiques : 1° le nombre α de plans répondant à un point (ici $\alpha = 1$); 2° le nombre β de points répondant à un plan; 3° le nombre γ de fois qu'une droite est dans le plan focal d'un de ses points.

D'autre part, tout système focal supérieur a deux nombres ordinaux (*Gradzahlen*) : 1° l'ordre m de la surface lieu des points dont les plans focaux forment une gerbe de sommet x: ce nombre est aussi la classe de la développable enveloppe des plans focaux des points d'une droite; pour la gerbe G, ce nombre est 7 pour la gerbe de Reye 6 pour celle de Sturm 3; — 2° la classe n de la surface enveloppée par les plans focaux des points d'un plan; ce nombre est aussi l'ordre de la courbe gauche lieu des points dont les plans focaux passent par un axe.

Enfin, entre les caractéristiques et les nombres ordinaux, on a les relations

$$\alpha + \gamma = m, \quad \beta + \gamma = n.$$

Donc γ vaut 6 dans la gerbe G, 5 dans celle de Reye, 2 dans celle de Sturm.

La détermination de β ou de n doit être différée.

76. Jusqu'ici nous avons pu éviter de résoudre les équations d'une cubique gauche par rapport aux x; pourtant, dans la recherche du plan osculateur, cette résolution n'a été que dissimulée. Il reste un certain nombre de questions pour lesquelles il ne parait guère possible de se priver de la représentation paramétrique explicite, encore que les calculs soient pénibles.

Afin de les simplifier un peu, nous les ferons pour la cubique particulière

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a'_x}{b'_x} = \frac{a''_x}{b''_x} = \omega,$$

en remettant, jusqu'au résultat final, l'introduction des facteurs α, α', α'', qui affectent les formes a_x, a'_x, a''_x.

Les équations précédentes résolues par rapport aux x donnent

$$\rho x_i = (a - \omega b \quad a' - \omega b' \quad a'' - \omega b'')_i;$$

l'indice i du déterminant indique que les symboles a, b, ⋯ doivent prendre, dans les lignes successives, les indices 1, 2, 3, 4, *sauf* i; de plus ce déterminant sera précédé du signe $+$ ou $-$ suivant que i sera impair ou pair.

On peut écrire aussi, en ordonnant par rapport à ω,

$$\rho x_i = (aa'a'')_i - \omega\,[(ba'a'')_i + (ab'a'')_i + (aa'b'')_i] + \omega^2\,[(bb'a'')_i + (ba'b'')_i + (ab'b'')_i] - \omega^3\,(bb'b'')_i.$$

Remplaçons les x par les expressions proportionnelles dans l'équation

$$\lambda a_x + \mu a'_x + \nu a''_x = 0$$

qui représente un plan π passant par A. Après cette substitution, le terme indépendant de ω est identiquement nul, c'est à dire que l'équation du plan est vérifiée pour $\omega = 0$, et cette valeur du paramètre caractérise le point A. Divisant alors par ω, on obtient une équation du second degré

$$\left\{\begin{matrix} -\lambda\,(aba'a'') \\ -\mu\,(a'ab'a'') \\ -\nu\,(a''aa'b'') \end{matrix}\right. + \omega \left\{\begin{matrix} \lambda\,[(abb'a'') + (aba'b'')] \\ +\mu\,[(a'bb'a'') + (a'ab'b'')] \\ +\nu\,[(a''ba'b'') + (a''ab'b'')] \end{matrix}\right. - \omega^2 \left\{\begin{matrix} \lambda\,(abb'b'') \\ +\mu\,(a'bb'b'') \\ +\nu\,(a''bb'b'') \end{matrix}\right. = 0.$$

Les racines de cette équation sont les paramètres des points, autres que A, où le plan π coupe la cubique gauche. Pour que ce plan soit tangent, il faut que les racines en ω soient égales, ce qui s'exprime par la relation

$$\left\{\begin{matrix} \lambda\,[(abb'a'') + (aba'b'')] \\ +\mu\,[(a'bb'a'') + (a'ab'b'')] \\ +\nu\,[(a''ba'b'') + (a''ab'b'')] \end{matrix}\right\}^2 = 4 \left\{\begin{matrix} \lambda\,(aba'a'') \\ +\mu\,(a'ab'a'') \\ +\nu\,(a''aa'b'') \end{matrix}\right\} \times \left\{\begin{matrix} \lambda\,(abb'b'') \\ +\mu\,(a'bb'b'') \\ +\nu\,(a''bb'b'') \end{matrix}\right\}.$$

Cette équation est du second degré en λ, μ, ν et, si ces paramètres sont considérés comme les coordonnées du plan π dans la gerbe (A), l'équation précédente est l'équation tangentielle du cône projetant la cubique gauche du point A.

Si λ, μ, ν sont trois constantes, la relation ci-dessus exprime la condition pour que le plan φ passant par A touche la cubique en un point autre que A. Introduisons alors les coefficients α, α', α'' : tout déterminant tel que $(abb'b'')$, $(abb'a'')$, $(aba'a'')$, ⋯ se trouvera multiplié par autant de facteurs α qu'il contient de symboles a. Ainsi l'équation précédente est

homogène et du quatrième degré en α, α', α''. Mais, si l'on y substitue, à α, α' α'', les expressions $\frac{a_x}{b_x}$, $\frac{a'_x}{b'_x}$, $\frac{a''_x}{b''_x}$, on obtient une équation du huitième ordre.

Les cubiques de la gerbe G *qui sont tangentes à un plan passant par* A *engendrent une surface du huitième ordre.*

77. Les équations

$$\lambda a_x + \mu a'_x + \nu a''_x = 0$$
$$\lambda b_x + \mu b'_x + \nu b''_x = 0$$

représentent une bisécante de la cubique

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a'_x}{b'_x} = \frac{a''_x}{b''_x}.$$

Si les coefficients λ, μ, ν vérifient la relation du n° précédent, la bisécante en question est une tangente ; l'élimination de λ, μ, ν donne le lieu des tangentes à la cubique, c'est-à-dire l'équation de la développable osculatrice à cette courbe.

Mais les deux équations de la bisécante donnent

$$\lambda : \mu : \nu = (a'_x b''_x - b'_x a''_x) : (a''_x b_x - b''_x a_x) : (a_x b'_x - a'_x b_x)$$

et la substitution, dans l'égalité du n° précédent, fournit l'équation suivante, dont le premier membre est un covariant important des six formes a, a', a'', b, b', b''.

$$\left\{ \begin{array}{l} (a'_x b''_x - b'_x a''_x)\,[(abb'a'') + (aba'b'')] \\ + (a''_x b_x - b'_x a_x)\,[(a'b'a''b) + (a'b'b''a)] \\ + (a_x b'_x - b_x a'_x)\,[(a''b''ab') + (a''b''ba')] \end{array} \right\}^2$$

$$+ 4 \left\{ \begin{array}{l} (a'_x b''_x - b'_x a''_x)\,(baa'a'') \\ + (a''_x b_x - b''_x a_x)\,(b'aa'a'') \\ + (a_x b'_x - b_x a'_x)\,(b''aa'a'') \end{array} \right\} \times \left\{ \begin{array}{l} (a'_x b''_x - b'_x a''_x)\,(abb'b'') \\ + (a''_x b_x - b''_x a_x)\,(a'bb'b'') \\ + (a_x b'_x - b_x a'_x)\,(a''bb'b'') \end{array} \right\} = 0.$$

En y considérant les x comme constants, on a la condition pour que la développable osculatrice à la cubique donnée passe par un point x, ou la condition pour qu'une tangente de cette courbe passe par x.

Si l'on introduit les symboles α, α', α'', on voit que la relation précédente les contient, d'une façon homogène, au sixième degré ; puis, si l'on remplace α, α', α'' par $\frac{a_X}{b_X}$, $\frac{a'_X}{b'_X}$, $\frac{a''_X}{b''_X}$, les X étant les coordonnées courantes, on a une équation du douzième degré en X.

Les cubiques de la gerbe G qui envoient une tangente par un point donné engendrent une surface du douzième ordre.

78. Soit $u_x = 0$ l'équation d'un plan quelconque ; si l'on y remplace les x par les fonctions de ω écrites au n° 76, on trouve une relation cubique en ω dont les racines sont les paramètres des points de rencontre de la cubique gauche avec le plan u. Voici cette relation

$$\begin{aligned}(uaa'a'') - \omega\,[(uba'a'') + (uab'a'') + (uaa'b'')]\\ + \omega^2\,[(ubb'a'') + (uba'b'') + (uab'b'')] - \omega^3\,(ubb'b'') = 0,\end{aligned}$$

ou, en abrégé,

$$A_0\omega^3 + 3A_1\omega^2 + 3A_2\omega + A_3 = 0;$$

les indices des coefficients A sont les degrés des termes que ces symboles représentent par rapport aux a et aussi par rapport aux α, quand on aura introduit ces derniers paramètres.

C'est encore M. Sturm (*) qui a donné l'interprétation géométrique des formes invariantes de cette équation, dans le cas où la courbe est définie par la représentation paramétrique de Möbius ($x_1 : x_2 : x_3 : x_4 = \omega^3 : \omega^2 : \omega : 1$). Il a montré que le Hessien de la forme cubique a pour racines les paramètres des points de la cubique alignés sur le pôle du plan u dans le système focal défini par la courbe. La droite d qui joint ces points est associée au plan u par l'intermédiaire de la cubique donnée ; si celle-ci décrit une gerbe linéaire, la droite d décrit une congruence.

Pareillement le covariant cubique représente un plan v associé au plan u et, quand la cubique décrit une gerbe, le plan v enveloppe une surface.

Nous devons nous borner à indiquer ces problèmes ; leur résolution, par la méthode actuelle, paraît en effet impraticable.

Le discriminant de la forme cubique est

$$4\,(A_0A_2 - A_1^2)\,(A_1A_3 - A_2^2) - (A_0A_3 - A_1A_2)^2;$$

son évanouissement représente, si les u sont variables, l'équation tangentielle de la cubique gauche ; si les u sont constants, il exprime la condition pour que le plan u soit tangent à la courbe. Le poids de ce discriminant est 6 ; donc, quand on introduira les paramètres α, α', α'',

---

(*) R. Sturm, *Darstellùng binärer Formen aùf der cubischen Raumcurve* (Journ. f. Math., t. 86).

ceux-ci figureront au sixième degré et quand enfin on remplacera $\alpha, \alpha', \alpha''$ par $\frac{a_x}{b_x}, \frac{a'_x}{b'_x}, \frac{a''_x}{b''_x}$, on aura une équation du douzième degré en x.

Les cubiques de la gerbe G qui touchent un plan donné engendrent une surface du douzième ordre.

79. Les conditions pour que l'équation

$$A_0\omega^3 + 3A_1\omega^2 + 3A_2\omega + A_3 = 0$$

ait trois racines égales, ou que la cubique oscule le plan u, sont exprimées par les relations

$$\frac{A_0}{A_1} = -\frac{A_1}{A_2} = \frac{A_2}{A_3}.$$

Une de ces relations sera du second degré en $\alpha, \alpha', \alpha''$; une autre sera du troisième degré et il y aura donc, en général, six systèmes de valeurs communes.

Il y a six cubiques de la gerbe G qui osculent un plan donné.

Ainsi se trouve complétée l'étude du système focal supérieur défini au n° 75; sa seconde caractéristique est donc $\beta = 6$ et le second nombre ordinal est

$$n = \beta + \gamma = 12,$$

ce qui est conforme aux résultats obtenus par M. Sturm.

80. Les conditions pour que l'équation du n° 78,

$$(uaa'a'') - \omega[(uba'a'') + (uab'a'') + (uaa'b'')] + \omega^2[(ubb'a'') + (uba'b'') + (uab'b'')] - \omega^3(ubb'b'') = 0$$

soit vérifiée pour toute valeur de ω, c'est-à-dire pour que la cubique gauche dégénère en une conique (ou un couple de droites) dans un plan u, plus une droite, sont exprimées par les relations

$$(uaa'a'') = 0,$$
$$(uba'a'') + (uab'a'') + (uaa'b'') = 0,$$
$$(ubb'a'') + (uba'b'') + (uab'b'') = 0,$$
$$(ubb'b'') = 0.$$

La première et la quatrième montrent que le plan u doit passer par les points A et B.

En éliminant les u entre les relations précédentes, on a la condition générale pour que la cubique dégénère :

$$\left| (aa'a'')_1 \quad (ba'a'')_1 + (ab'a'')_1 + (aa'b'')_1 \quad (bb'a'')_1 + (ba'b'')_1 + (ab'b'')_1 \quad (bb'b'')_1 \right| = 0.$$

Le premier membre est un invariant simultané des formes a, a', a'', b, b', b''; on doit donc pouvoir l'exprimer sous forme d'une somme de produits de déterminants à quatre lignes.

En décomposant les termes de la seconde et de la troisième colonne, on a une somme de neuf déterminants, dont l'un sera par exemple

$$\Delta = \left| (aa'a'')_1 \quad (ba'a'')_1 \quad (bb'a'')_1 \quad (bb'b'')_1 \right|.$$

Pour le transformer, multiplions-le par $(bb'a'a'')$, en appliquant la règle de la multiplication des déterminants; nous aurons

$$\Delta \times (bb'a'a'') = \begin{vmatrix} (baa'a'') & 0 & 0 & 0 \\ (b'aa'a'') & (b'ba'a'') & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (a'bb'a'') & (a'bb'b'') \\ 0 & 0 & 0 & (a''bb'b'') \end{vmatrix},$$

ou encore

$$\Delta \times (bb'a'a'') = (baa'a'')\,(b'ba'a'')\,(a'bb'a'')\,(a''bb'b''),$$

$$\Delta = -\,(baa'a'')\,(a'bb'a'')\,(a''bb'b'').$$

On trouve des expressions analogues pour les huit autres déterminants.

La somme de ces neuf quantités s'annule quand la cubique dégénère. Si alors, on introduit, dans l'équation, les coefficients α, α', α'', tous les termes contiendront $\alpha\alpha'\alpha''$ en facteur commun, puisque chacun des produits tels que Δ contient un des déterminants $(baa'a'')$, $(b'aa'a'')$, $(b''aa'a'')$.

Après suppression du facteur commun, l'équation est du troisième degré en α, α', α'' ; donc quand on remplace ces paramètres par $\frac{a_x}{b_x}$, $\frac{a'_x}{b'_x}$, $\frac{a''_x}{b''_x}$, on a une égalité du sixième ordre. D'après le n° 46 elle représente une quadrique et une surface du quatrième degré engendrées par des cubiques dégénérées de la gerbe G.

THÈSES ANNEXÉES.

I.

La Géométrie, en appliquant la théorie de l'élimination entre deux équations algébriques, n'utilise guère que la condition d'existence d'une seule racine commune. Les conditions pour que les équations aient plus d'une racine commune peuvent aussi donner des résultats géométriques intéressants.

II.

La construction de la sphère osculatrice à une cubique gauche est un problème du second degré.

III.

Si $a_x^m = 0$, $b_x^n = 0$ représentent des surfaces d'ordres respectifs m et n, les équations

$$\frac{a_x^m}{b_x^n} = \frac{a_x'^m}{b_x'^n} = \frac{a_x''^m}{b_x''^n}$$

représentent une courbe gauche. Cette figure n'a été étudiée que dans le cas de $m = n = 1$. Pour $m = 2$ et $n = 1$, on a une ligne du septième ordre; quelques unes de ses propriétés se déduisent immédiatement des équations ci-dessus.

IV.

Dans tout connexe $(1, n)$ de l'espace, la surface *relative* à un point quelconque est unicursale.